البيانية

كتاب في الرياضيات

د(هـ) = (س(هـ) ، ص(هـ))

تأليــف :
م. محمد سلام علي صالح القليح

مايو / 2019م

الفهــــــــــرس

بسم الله الرحمن الرحيم

المقدمـة

الحمد لله خلق الإنسان ،علمه البيان ،والصلاة والسلام على سيدنا محمد رسول الله المبعوث رحمة للعالمين ، الذي كان خلقة القران، وعلى اله وأصحابه صلاة وسلاماً دائمين متلازمين إلى يوم الدين أما بعد:

فانه بحمد الله وفضله علينا وعلى الناس وتوفيقاً منه عز وجل ، يسرني ويشرفني أن أقدم إليكم الإنجاز المتواضع **كتاب البيانية** والذي أرجو أن يحقق الفائدة .وهذا الكتاب يهتم في مجال الرياضيات. والذي يتناول طريقة جديدة مبتكرة للتعامل مع الدوال والتي أسمناها **البيانية**. فالبيانية هي حل أخر للدوال الرياضية ولكنها طريقة متقدمة للتعامل مع دارسة الدوال وتمثيلها بياناً. وقد جاءت فكرة البيانية على أساس تمثيل القطع المستقيمة ومقطع من منحنى دالة والسطوح البيانية و كذالك الأشكال الهندسية بصيغة رياضية مفهومة وغير معقدة يسهل دراستها بيانياً وهذا أن شاء الله ما سنوضحه خلال هذا الكتاب والذي يتألف من خمسة فصول.

فالفصل الأول يتمحور حول مفهوم البيانية و صغتها الرياضية موضحاً أوجه التشابه والعلاقة بين البيانية والدالة وكيفية التحويل من الصورة البيانية إلى الدالة والعكس. بالإضافة إلى سرد بعض خواص البيانية وكذالك التطرق إلى تفاضل و تكامل الصورة البيانية.

أما في الفصل الثاني فهو يتمركز حول كيفية تمثيل القطع المستقيمة و القطع المنحنية بالصورة البيانية و أيضاً الدائرة والقطع الناقص بالإضافة إلى ذالك أيجاد تفاضل مثل هكذا قطع.

أما بالنسبة للفصل الثالث والرابع فهما يدورا حول بيانية الشكل الرباعي مثل المربع والمستطيل والسطوح البيانية وطريقة تمثيلها بالصيغة البيانية .

أما في الفصل الخامس فهو يتمحور حول أهم تطبيقات البيانية إلا و هو بيانية مدار الأرض و القمر.

والله الموفق،،،

المؤلف

الفصل الأول :

البيانية

١٠١ تعريف البيانية

البيانيـة هي صيغـة رياضيـة عامـة والتـي تـعبر عن مجموعـة من نقـاط الإحداثيات (س ، ص) مثلت (تم تمثلها) علـى محور الإحداثيات (الرسم البيانـي) و هذه النقـاط فـي الأخير تشكل رسم بيانـي ٠وذالك الرسم البيانـي قد يمثل نقطـة أو قطعـة مستقيمـة أو مستقيم أو دائرة أو منحنـى بيانـي أو سطح بيانـي ٠بمعنـي أخر يمكننا القول بأن البيانيـة هي حل أخر وطريقـة متقدمـة لداول٠

٢٠١ الصورة الرياضيـة البيانيـة

الصورة أو الصيغـة الرياضيـة البيانيـة تعطى بالشكل التالي:

د(هـ) = (س(هـ) ، ص(هـ)) ←(١٠١)

حيث :

س(هـ) يمثل المحور السيني ، س = س (هـ) ،

ص(هـ) يمثل المحور الصـادي ، ص= ص(هـ) ،

هـ متغير و الذي يتحكم بقيم كل من س، ص و يسمي البيانـي أو الرسـام وهـذه الصورة الرياضيـة تسمي بيانيـة محوران ذات متغير واحد ٠ وهناك صورة أخري لبيانيـة مثل بيانيـة محوران ذات متغيرين وهذا سنوضحه أن شـاء الله في الفصل الرابع وغيرها من الصور البيانيـة الأخرى ٠

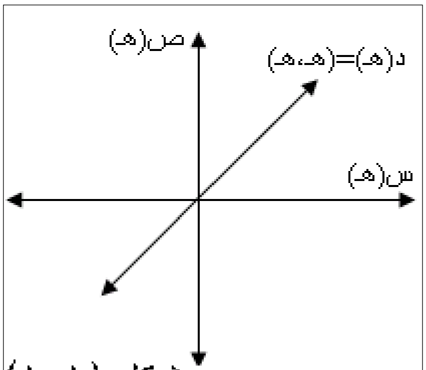
أنظر الشكل (١٠١) أسفل والذي يمثل خط مستقيم ص=س والذي يمكن أن نمثله بالصورة البيانيـة كالتالي: د(هـ) = (هـ،هـ)

فعندما هـ = ٠ ⇐ س (٠) = ٠ ، ص(٠) = ٠ أي أن د(٠)=(٠،٠)

وكذالك د(١) =(١،١) حيث س = ١، ص= ١ و ذالك عندما هـ = ١ وهكذا٠

و للتوضيح أكثر أنظر الجدول أسفل٠

هـ	س(هـ)=هـ	ص(هـ)=هـ	(س(هـ)،ص(هـ))
٤-	٤-	٤-	(٤-،٤-)
٣-	٣-	٣-	(٣-،٣-)
٢-	٢-	٢-	(٢-،٢-)
١-	١-	١-	(١-،١-)
٠	٠	٠	(٠،٠)
١	١	١	(١،١)
٢	٢	٢	(٢،٢)
٣	٣	٣	(٣،٣)
٤	٤	٤	(٤،٤)



شكل (١٠١)

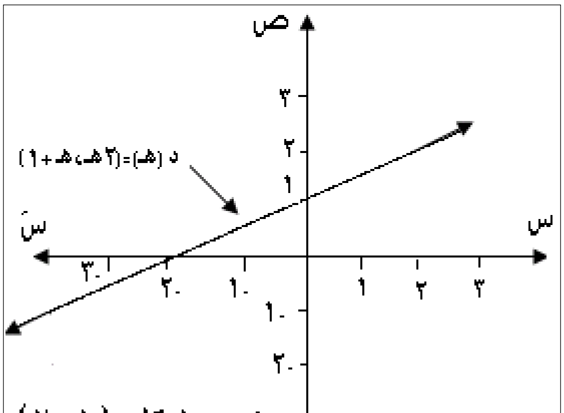
مثال (١٠١) : إرسم البيانيات التالية على محور الإحداثيات ؟

أ) د(هـ) = (٢هـ ، هـ +١) جـ) د(هـ)=(جاهـ ، جاهـ)

ب) د(هـ)=(هـ ، هـ ^{٢})

الحل:

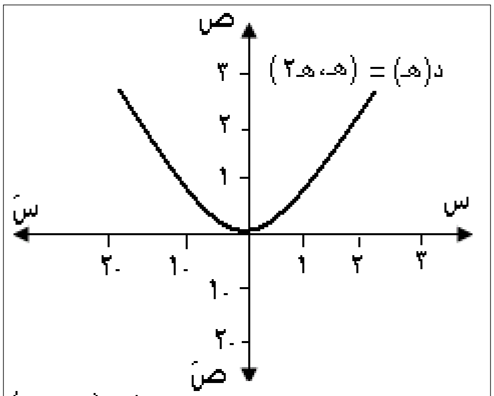
أ) د(هـ) = (٢هـ ، هـ +١)



شكل (٢٠١)

هـ	س(هـ)	ص(هـ)	(س(هـ)،ص(هـ))
-٢	-٤	-١	(-٤،-١)
-١	-٢	٠	(-٢،٠)
٠	٠	١	(٠،١)
١	٢	٢	(٢،٢)
٢	٤	٣	(٤،٣)

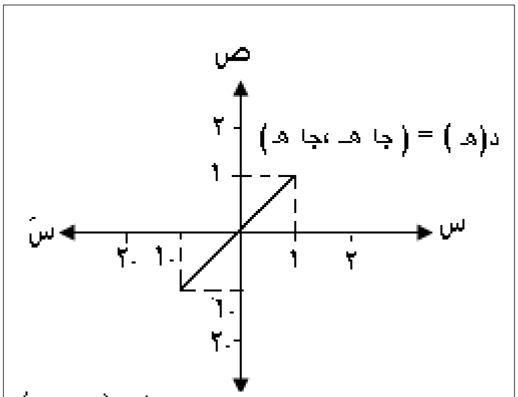
ب) د(هـ)=(هـ ، هـ ^{٢})



شكل (٣٠١)

هـ	س	ص	(س،ص)
-٢	-٢	٤	(-٢،٤)
-١	-١	١	(-١،١)
٠	٠	٠	(٠،٠)
١	١	١	(١،١)
-٢	٤	٤	(٢،٤)

جـ) د(هـ) = (جاهـ ، جاهـ)



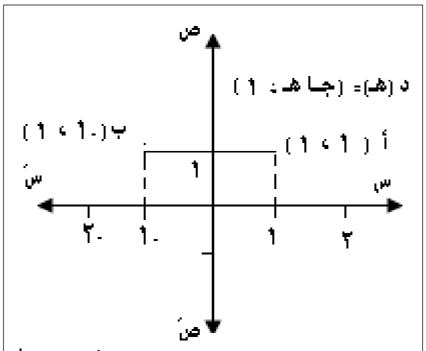
شكل (٤٠١)

هـ	س = جا هـ	ص= جا هـ	(س،ص)
-٩٠	-١	-١	(-١ ، -١)
-٦٠	$\frac{-\sqrt{٣}}{٢}$	$\frac{-\sqrt{٣}}{٢}$	$\left(\frac{-\sqrt{٣}}{٢} ، \frac{-\sqrt{٣}}{٢}\right)$
-٣٠	$\frac{-١}{٢}$	$\frac{-١}{٢}$	$\left(\frac{-١}{٢} ، \frac{-١}{٢}\right)$
٠	٠	٠	(٠ ، ٠)
٣٠	$\frac{١}{٢}$	$\frac{١}{٢}$	$\left(\frac{١}{٢} ، \frac{١}{٢}\right)$
٦٠	$\frac{\sqrt{٣}}{٢}$	$\frac{\sqrt{٣}}{٢}$	$\left(\frac{\sqrt{٣}}{٢} ، \frac{\sqrt{٣}}{٢}\right)$
٩٠	١	١	(١، ١)

٣٠١ أسباب ابتكار الصيغـة البيانيـة

هنـاك أسبـاب عده لابتكـار الصيغـة الرياضيـة البيـانيـة منـهـا:

١) الصيغـة البيانيـة تعطي القطع المستقيمة المرسومة على محور الإحداثيات صورة رياضيـة مبسطة وبدون شرط ٠ فمثلاً لو نظرنا إلى الشكل (٥٠١) أسفل والذي يمثل قطعـة مستقيمة |أب| طولها يسـاوى ٢ وحدة ، حيث أ= (١،١) و ب=(-١،١) ٠



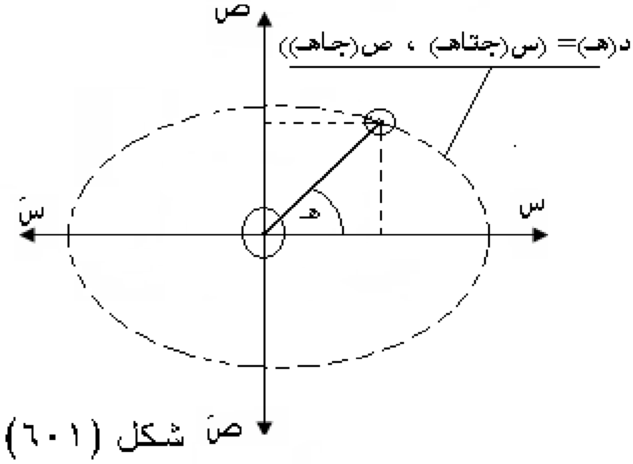
شكل (٥٠١)

نـلاحظ أن النقطـة المستقيمـة |أب| تمثل دالـة كالتـالي:

$$\text{د(س)} = \begin{cases} ١ & -١ \le \text{س} \le ١ \\ ٠ & \text{س} > ١،\text{س} < -١ \end{cases}$$

وأيضـا يمكن تمثيل هذه القطعـة المستقيمة بصورة رياضيـة أخرى أو الصيغـة البيـانيـة كالتـالي
د(هـ) = (جاهـ، ١)
حيث جاهـ يمثل المحور السيني و ١ يمثل المحور الصـادي ،هـ أي قيمة حقيقيـة (متغير)

٢) يمكن استخدام الصيغـة البيانيـة في دراسـة حركـة دوران الكواكب حول الشمس والفضـاء الخارجي بيانياً، أنظر الشكل (٦٠١) أسفل والذي يبين دوران الأرض حول الشمس وذالك بالاعتماد على ثلاث متغيرات وهي محوري الإحداثيات س ، ص والزاويـة هـ أو الزمن كما نلاحظه في البيانيـة التاليـة:
د(هـ)= (س(جتاهـ) ، ص(جاهـ))
حيث هـ يمثل الزاويـة أو الزمن ،
س(جتاهـ) يمثل المحور السيني،
ص(جاهـ) يمثل المحور الصـادي ٠



شكل (٦٠١)

٣) كما يمكن أستخدم الصيغـة البيانيـة في قوانين الفيزيـائي والتي تـعتمد علـى أكثر من متغيرين فمثلاً الصيغـة البيانيـة للكميات الفيزيـائي (بيانيـة السرعـة) السرعـة (ع) و الزمن(ز) والمسـافـة (ف) و العجلة جـ(ز) تعطي كالأتي:

د(ز)=(ف(ز) ، ع(ز))

حيث

ز يمثل الزمن ، ف(ز) يمثل المسـافـة،ع(ز) يمثل السرعـة،أما بالنسبـة للعجلة جـ(ز) يمكن إيجادها من بيانيـة السرعة (ف(ز) ، ع(ز)) وذالك بقسمـة السرعـة ع(ز) على الزمن (ز)٠

أي أن $جـ(ز) = \frac{ع(ز)}{ز}$

٤) البيانية تمثل الأشكال الرباعيـة والمثلثات والسطوح الرباعيـة وغيرها بصورة رياضيـة مبسطـة ومفهومـة وهذا أن شـاء الله سوف نوضحه في الفصول القادمة وهنـاك أيضـا أسباب أخرى سوف نمر عليها خلال الفصول القادمة٠

٤٠١ العلاقـة بين الدالـة و البيانيـة

كما هو معروف لدينا أن أي دالـة تأخذ الصورة الرياضيـة التاليـة

ص= تا(س) ←(١)

وإن الصورة الرياضيـة لبيانيـة هي

د(هـ) = (س ، ص) ←(٢)

ضع س= هـ ⇐ ص= تا(هـ) ←(٣)

من (٢) و (٣) ينتج لنا

د (هـ) = (هـ ، تا (هـ)) ←(٤)

ومن (١) ، (٤) نستنتج أن

ص = تا(س) ⇔ د(هـ) = (هـ ، تا(هـ)) ←(٥)

مما سبق يمكن القول إن الصيغـة الرياضيـة ص = تا(س) هي نفس أو تكافئ الصيغـة الرياضيـة د(هـ)=(هـ ، تا(هـ))٠

فمثلاً الدالـة ص = $س^{٢}$ +١ يمكن تمثيلها بالصورة البيانيـة كالتالي :

د(هـ) =(هـ ، $هـ^{٢}$ +١)

و أيضـا الدالـة ص= جـا س تمثل منحنى على محور الإحداثيات نفس المنحنى الذي تمثله البيانيـة د(هـ)= (هـ ، جا هـ)٠

مثال(٢٠١) : - حول كل من البيانيات التاليـة إلى دوال

أ) د(هـ) = (هـ ، $هـ^{٢}$)

ب) د(هـ)= ($هـ^{٢}$ ،٢هـ+١)

حـ) د(هـ) = ($\frac{١}{٢}$ هـ ، جا هـ)

الحل:

أ) د(هـ) = (هـ ، هـ^{٢})

ضع هـ = س ، ص= هـ^{٢} ⇐ ص = س^{٢}

∴ ص = س^{٢} ⇔ (هـ ،هـ^{٢})

ب) د(هـ)= (هـ^{٢}، ٢هـ + ١)

ضع س =هـ^{٢} ⇐ هـ = $\sqrt{س}$ ←(١)

، ص=٢هـ +١ ⇐ هـ = $\frac{ص+١}{٢}$ ←(٢)

من (١) و (٢) ينتج أن

$\frac{ص+١}{٢}$ = $\sqrt{س}$ ⇔ ص=٢ $\sqrt{س}$ -١

ص= $\sqrt{س}$-١ ⇐د(هـ)=(هـ^{٢} ، ٢هـ +١)

حـ) د(هـ) = ($\frac{١}{٢}$ هـ ، جا هـ)

ضع س = $\frac{١}{٢}$ هـ ، ص = جا هـ ⇐ ص = جا ٢س

ص = جا ٢س ⇔ د(هـ) =($\frac{١}{٢}$ هـ ، جاهـ)

مثال (٣٠١) :- حول كل من الدوال التالية إلى الصورة الرياضيـة د(هـ) = (هـ ،تاهـ) ؟

أ) ص = ٢س+١

ب) ص= جتا س

جـ) ص= $\sqrt{س+١}$

الحل :-

أ) ص =٢س+١

ضع س = هـ ⇐ ص = ٢ هـ +١

∴ د (هـ) = (هـ ،٢هـ +١)

ب) ص = جتا س

ضع س = هـ ⇐ ص = جتا هـ

∴ د (هـ) =(هـ ،جتا هـ)

جـ) ص= $\sqrt{س+١}$

ضع س = هـ ⇐ ص = $\sqrt{هـ+١}$

∴ د(هـ) =(هـ ، $\sqrt{هـ+١}$)

١٠٥ بعض خواص البيانية

وفي هذا الجزء سوف نورد بعض خواص البيـانيـة ٠

خاصية (١٠١)

د (هـ) = (س ± أ ، ص) $\Leftrightarrow$ د(هـ) = (س ، ص ∓ أ) ، أ عدد حقيقي ٠

مثال على ذالك البيانيـة د(هـ)=(هـ + ٢،هـ) هي نفس البيانيـة د(هـ)=(هـ ،هـ - ٢) ٠

خاصية (١٠٢)

١) د(هـ) = (س × أ ، ص) $\Leftrightarrow$ د (هـ) (س ، $\frac{ص}{أ}$)

٢) د(هـ) = ($\frac{س}{أ}$، ص) $\Leftrightarrow$ د(هـ ، ص × أ) ، (أ) أي عدد حقيقي ٠

مثال على ذالك

د(هـ) = ($\frac{هـ}{٢}$، هـ) $\Leftrightarrow$ د(هـ) = (هـ ، ٢هـ)

خاصية (١٠٣)

١) د(هـ) = (س^{ن}، ص) $\Leftrightarrow$ د(هـ) = (س ، $\sqrt[ن]{ص}$)

٢) د(هـ) = (س$^{\frac{1}{ن}}$، ص) $\Leftrightarrow$ د(هـ) = (س ، ص^{ن}) ، ن عدد حقيقي ٠

مثال على ذالك

د(هـ) = (هـ ، هـ^{٢}) $\Leftrightarrow$ د(هـ) =(هـ ، $\sqrt{هـ}$)

د (هـ) = (هـ ، هـ$^{\frac{١}{٣}}$) $\Leftrightarrow$ د(هـ) = (هـ^{٣} ،هـ)

خاصية (١٠٤)

د(هـ) = (س ، $\frac{1}{ص}$) $\Leftrightarrow$ د(هـ) = ($\frac{1}{س}$ ، ص)

مثال على ذالك

(هـ ، $\frac{1}{هـ}$) $\Leftrightarrow$ ($\frac{1}{هـ}$، هـ)

خاصية (١٠٥)

١) د(هـ) = (جا س ،ص) $\Leftrightarrow$ د(هـ) = (س، جا$^{-١}$ص)

٢) د(هـ) = (جتا س ،ص) $\Leftrightarrow$ د(هـ) = (س ، جتا$^{-١}$ ص)

مثال على ذالك

البيانية (هـ ، جا هـ) تكافئ البيانيـة (جا$^{-١}$هـ ، هـ)

وهنا سوف نورد بعض الأمثلة على هذا الخواص

١) (هـ + ١ ، هـ - ١) $\Leftrightarrow$ (هـ ، هـ - ٢)

٢) (هـ + ١ ، هـ - ١) $\Leftrightarrow$ (هـ + ٢ ، هـ)

٣) (هـ ، هـ - ٢) $\Leftrightarrow$ (هـ + ٢ ، هـ)

٤) (جا٢هـ ، هـ) $\Leftrightarrow$ (٢ هـ ، جا$^{-1}$هـ)

٥) (٢هـ ، جا$^{-1}$ هـ) $\Leftrightarrow$ (هـ ، $\frac{1}{2}$ جا$^{-1}$ هـ)

٦) (هـ ، هـ$^{\frac{2}{3}}$) $\Leftrightarrow$ (هـ^{3} ، هـ^{2})

٧) (جا هـ ، هـ) $\Leftrightarrow$ (هـ ، جا$^{-1}$هـ)

٨) (جا$^{-1}$٣هـ ، ٦هـ) $\Leftrightarrow$ (هـ ، جا ٢هـ)

خاصيـة (٦٠١)

عند جمع بيانيتان نجمع المحتوى الصـادي من البيانيـة الأولى مع المحتوى الصـادي من البيانيـة الثانيـة وذالك عندما يكون المحتوى السيني من البيانيـة الأولى يسـاوي المحتوى السيني من البيانيـة الثانيـة وكذالك بالنسيبـة للعمليات الحسـابيـة الأخرى كالطرح و الضـرب و القسمـة أي أن

(س ، ص١) + (س،ص٢) = (س ، ص١ + ص٢)

(س ، ص١) - (س،ص٢) = (س ، ص١ - ص٢)

(س ، ص١) × (س ، ص٢) =(س،ص١ × ص٢)

(س ، ص١) ÷ (س،ص٢) = (س ، ص١÷ ص٢)

مثال (٤٠١) أوجد نـاتج جمع ما يلي؟

أ) (هـ ،٢هـ) + (هـ ، هـ + ١)

ب) (هـ ،هـ) + (هـ + ١ ، ٢هـ)

الحل:

أ) (هـ ،٢هـ) + (هـ ، هـ + ١)=(هـ ،٣هـ + ١)

ب) نضـع هـ = هـ -١ ثم نعوض بقيمة هـ الجديدة وفق البيانيـة (هـ + ١ ، ٢هـ)

أي أن (هـ +١ ، ٢هـ) = (هـ ، ٢هـ - ٢)

$\therefore$ (هـ،هـ) + (هـ + ١،٢هـ) = (هـ،هـ) + (هـ،٢هـ + ٢) = (هـ،٣هـ + ٢)

ملاحظة:

عندما نقول عن بيانيتين إنهما متسـاويتـان ليس من الضـروري أن يكون المحتوى السينـي من البيانيـة الأولى يسـاوي المحتوى السينـي من البيانيـة الثـانيـة و المحتوى الصـادي من البيانيـة الأولى يسـاوي المحتوى الصـادي من البيانيـة الثانيـة.

مثال على ذالك البيانية (٢هـ +٢ ، هـ +١) هي نفسـها البيانيـة (٢هـ ، هـ)

مثال (١٠٥) :- حول كل من البيانيتين التاليتين ألي دوال وما ذا نستنتج ؟

أ) د (هـ) = (هـ ،٢هـ -١) ب) د(هـ)=($\frac{هـ+١}{٢}$ ،هـ)

الحل :-

أ) د (هـ) = (هـ ،٢هـ -١)

نضع س= هـ ، ص =٢هـ-١

∴ ص = ٢س – ١

ب) ($\frac{هـ+١}{٢}$،هـ)

ضع س = $\frac{هـ+١}{٢}$ ، ص= هـ

∴ س = $\frac{ص+١}{٢}$ ⇔ ص= ٢س – ١

من (١) و (٢) نستنتج أن

البيانية (هـ ، ٢هـ - ١) هي نفس البيانية ($\frac{هـ+١}{٢}$، هـ)

مثال (١٠٦):- حول الدوال التالية إلى أكثر من صورة بيانية.

أ) ص= ٢جا^{٢} س +٥ ب) ص= س^{٢}+٢س

الحـــــل :-

ضع س= هـ ⇐ ص = ٢جا^{٢} هـ +٥

∴ د(هـ) = (هـ ،٢جا^{٢} هـ +٥)

حل أخر

ضع جا س = هـ ⇐ ص =٢هـ^{٢} + ٥

∴ د(هـ) = (جا$^{-١}$هـ ، ٢هـ^{٢} + ٥)

ب) ص= س^{٢} +٢س

ضع س =هـ ⇐ ص = هـ^{٢}+٢هـ

∴د(هـ) = (هـ ، هـ^{٢} + ٢هـ)

حل أخر

ص =(س^{٢} +٢س +١) – ١ = (س+١)^{٢} -١

ص = (س+١)^{٢} -١

ضع هـ = س+١ ⇐ ص = هـ^{٢} -١

∴ د(هـ) = (هـ - ١ ، هـ^{٢} -١) وهناك أكثر من صورة بيانية للبيانية الواحدة.

١٠٦ معكوس البيانيـة

كما للدالـة دالـة عكسيـة كذالك للبيانيـة أيضـا بيانيـة عكسيـة ٠ فمثلا معكوس الدالـة ص= س^{٢} وفق الفترة [٠ ، +∞[هي الدالـة ص= $\sqrt{س}$ ٠

وبما أن الدالـة ص= س^{٢} تكافئ البيانيـة د(هـ) = (هـ ، هـ^{٢}) ٠ والدالـة ص= $\sqrt{س}$ تكافئ البيانيـة د(هـ)=(هـ ، $\sqrt{هـ}$) أو البيانيـة د(هـ) = (هـ^{٢} ، هـ) ٠ ⟵(خاصيـة ١٠٣) ٠

أذن معكوس البيانيـة د(هـ)=(هـ ،هـ^{٢}) هي البيانيـة د(هـ) =($\sqrt{هـ}$،هـ) أو د(هـ)=(هـ^{٢} ، هـ)

نظريـة (١٠١): يمكننا إيجاد البيانيـة العكسيـة لأي بيانيـة و ذالك التبادل بين محتوى س ومحتوى ص ، أي أن معكوس البيانيـة د(هـ)= (س(هـ) ، ص(هـ))هي البيانيـة د(هـ) = (ص(هـ) ، س(هـ))

مثال (١٠٧) :- أوجد معكوس البيانيات التاليـة ؟

أ) د(هـ) = (هـ ، هـ^{٢}+١)
ب) د(هـ) = (١ ، جتا هـ)
جـ) د(هـ) = (جاهـ ، جتاهـ)

الحــــــــــل:-

أ) د(هـ) = (هـ ، هـ^{٢}+١)
المعكوس هو د(هـ) = (هـ^{٢}+ ١ ، هـ)

ب)د(هـ) = (١ ، جتا هـ)
المعكوس هو د(هـ) = (جتا هـ ، ١)

جـ) د(هـ) = (جاهـ ، جتاهـ)
المعكوس هو د(هـ) = (جتاهـ ، جاهـ)

١٠٧ مشتقـة البيانيـة

كما هو معلوم لدينا إن الدالـة ص=س^{٢} تكافئ البيانيـة د(هـ)=(هـ ،هـ^{٢}) وأن مشتقـة الدالـة ص=س^{٢} هي الدالـة ص= ٢س والتي تكافئ البيانيـة د(هـ)=(هـ ،٢ هـ) ٠

أي أن مشتقـة البيانيـة د(هـ)=(هـ ،هـ^{٢}) هي البيانيـة د(هـ) = (هـ ، ٢هـ) ٠

قاعدة (١٠١):- مشتقـة البيانيـة د(هـ) = (س(هـ) ، ص(هـ)) هي البيانيـة د(هـ)$'$ = (س(هـ) ، $\frac{ص'(هـ)}{س'(هـ)}$) ، ص$'$(هـ) = $\frac{ءص}{ءهـ}$ ، س$'$(هـ) = $\frac{ءس}{ءهـ}$

مثال (٨٠١) :- أوجد مشتقـة كل من البيـانيات التاليـة ؟

أ) د(هـ)=(هـ ، هـ^{٣} +هـ)

ب) د(هـ)=(هـ^{٢} ، هـ)

جـ) د(هـ) = (هـ ، جاهـ)

د) د(هـ) = (جاهـ ، هـ)

هـ)د(هـ)=(هـ^{٢}،هـ^{٣})

الحل:

أ) د(هـ) = (هـ ، هـ^{٣} +٢هـ)

س= هـ ⇐ سَ= $\frac{\text{ءس}}{\text{ءهـ}}$ =١ ،

ص= هـ^{٣} +٢ هـ ⇐ صَ= $\frac{\text{ءص}}{\text{ءهـ}}$ = ٣هـ^{٢} +٢

∵ دَ(هـ)=(س ، $\frac{\text{صَ}}{\text{سَ}}$)

∴ دَ(هـ) =(هـ ،٣هـ^{٢} + ٢)

ب) د(هـ) = (هـ^{٢} ، هـ)

س= هـ^{٢} ⇐ سَ= ٢هـ

ص=هـ ⇐ صَ= ١

دَ(هـ) =(س، $\frac{\text{صَ}}{\text{سَ}}$) = (هـ^{٢} ، $\frac{١}{\text{٢هـ}}$)

جـ) د(هـ) = (هـ ، جاهـ)

دَ(هـ)= (هـ ، جتاهـ)

د) د(هـ) = (جاهـ ، هـ)

دَ(هـ)= (جاهـ ، $\frac{١}{\text{جتاهـ}}$)

هـ) د(هـ) = (هـ^{٢} ، هـ^{٣})

دَ(هـ) = (هـ^{٢} ، $\frac{٣}{٢}$هـ)

٨٠١ تكامل بيانيـة

مما تعلمنه سـابقا الدالـة د(س) = جتـا س هي نفس البيـانيـة د(هـ) = (هـ ، جتاهـ) وتكامل الدالـة د(س)=جتا س هي الدالـة د(س)= جاس، و بما أن الداله د(س)=جاس هي نفس البيـانيـة د(هـ)=(هـ ، جاهـ) ٠

أي أن تكامل البيانيـة د(هـ)=(هـ ، جتاهـ) هي البيـانيـة د(هـ) = (هـ ، جاهـ)

قاعدة (٢٠١) :- تكامل البيانيـة د(هـ) = (س(هـ) ، ص(هـ))هي البيانيـة

$$\text{د(هـ)} = \left(\text{س(هـ)}، \int \text{سَ(هـ)}\ \text{ص(هـ)}\ \text{ءهـ}\right)$$

مثال(٩٠١) : أوجد تكامل كل من البيانيتين التاليتين؟

أ) د(هـ) = (هـ ، جاهـ)

ب) د(هـ) = ($\text{هـ}^{٢}$ ،هـ)

الحل:

أ) د(هـ) = (هـ ، جاهـ)

س(هـ) = هـ ⇐ سَ(هـ) = ١

ص(هـ)= $\int$ جاهـ ءهـ = - جتاهـ

أذن تكامل البيانيـة (هـ ، جاهـ) هي البيانيـة (هـ ، - جتاهـ + ث)

ب) د(هـ) = ($\text{هـ}^{٢}$ ،هـ)

س=$\text{هـ}^{٢}$ ، سَ=٢هـ

ص=$\int$ ٢هـ $\text{هـ}^{٢}$ ءهـ = $\frac{٢}{٣}\text{هـ}^{٣}$

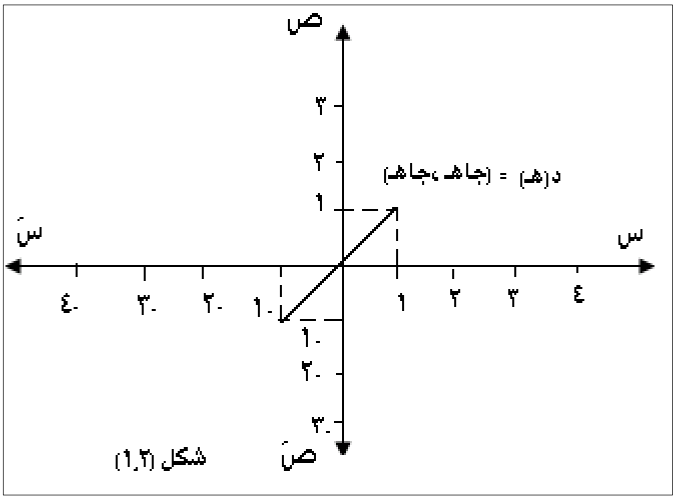
$\int$ ($\text{هـ}^{٢}$ ،هـ)ءهـ = ($\text{هـ}^{٢}$، $\frac{٢}{٣}\text{هـ}^{٣}$ + ث)

الفصل الثاني :

بيانية المقطوعات

١٠٢ المقدمة

في هذا الفصل سوف يأخذنا الحديث حول المقطع البياني ، فالمقطع البياني هو مقطع من خط مستقيم (القطة المستقيمة) أو مقطع من منحنى أو مقطع دائري أو قطع ناقص٠ أنظر الشكل (١٠٢) والذي يمثل قطعة مستقيمة |أب| والواقعة على الفترة [-١،١] وطولها يساوي ٢وحدة ٠



من الشكل (١٠٢) نلاحظ أن القطعة المستقيمة |أب| تمثل مقطع من البيانية التالية:

د(هـ) = (هـ ، هـ)

وهذه القطعة المستقيمة يمكن تمثيلها بالصورة البيانية كما يلي :

د (هـ) = (جاهـ ، جاهـ)

٢٠٢ القطعة المستقيمة :

القطعة المستقيمة هي مقطع من خط مستقيم وهناك ثلاثة أشكال من القطعة المستقيمة هي القطعة المستقيمة الأفقية والعمودية والقطعة المستقيمة المائلة وسوف نوضح بيانية كل قطعة علي حدا في الدروس القادمة٠

١٠٢٠٢ القطعة المستقيمة الأفقية

وهي القطعة المستقيمة الموازية لمحور السينات وبيانية القطعة المستقيمة الأفقية بشكل عام تعطي كما يلي :

د(هـ) = (أجا هـ + ب ، جـ)

أو د(هـ) = (أ جتاهـ +ب ، جـ) ، أ ، ب ، جـ أعداد حقيقية ← (١٠٢)

أمثلة على ذالك

١) د(هـ) = (جاهـ ، ١)

٢) د(هـ) = (٢جاهـ ، -١)

٣) د(هـ)= (جتاهـ + ١، ٣) ٠٠٠٠٠ الخ

قاعدة (١٠٢) :-
لإيجاد بيانية القطعة المستقيمة الأفقية د(هـ)= (أجاهـ +ب ،جـ) الواصلة بين نقطتين٠ نضع أكبر قيمة من س تساوي (أ +ب) واصغر قيمة تساوي (-أ +ب) ثم نحل المعادلتين لإيجاد قيم أ ،ب أما قيمة جـ تأخذ قيمة ص الوحيدة ٠

مثال (١٠٢) :
أوجد معادلة القطعة المستقيمة الواصلة بين النقطة (٣،٥) والنقطة (-١ ، ٣) ؟
الحل :-
نلاحظ أن القطعة المستقيمة هي قطعة مستقيمة موازية لمحور السيني والتي ببانيتها هي
د(هـ) = (أ جاهـ + ب ، جـ) ، جـ =٣
نضع أ+ ب = أكبر قيمة من س ، -أ+ ب = أصغر قيمة من س , أي أن
أ + ب = ٥ ⟵(١)
-أ + ب = -١ ⟵(٢)
من المعادلة (١) و (٢) ينتج
أ=٣ ، ب=٢
∴ د(هـ)= (٣ جاهـ + ٢ ، ٣)
أو د(هـ) = (٣ جتا هـ + ٢ ، ٣)

٢٠٢٠٢ القطعة المستقيمة العمودية

وهي القطعة المستقيمة الموازية لمحور الصادات ، وبيانية القطعة المستقيمة العمودية هي
د(هـ) =(جـ ، أجاهـ +ب) أو
د(هـ) = (جـ ، أ جتا هـ) حيث أ ، ب ، جـ أعداد حقيقية ⟵(٢٠٢)

أمثلة على القطعة المستقيمة العمودية :
١) د(هـ)=(١،جاهـ)
٢) د(هـ)=(٥،٤جاهـ)
٣) د(هـ)=(٧،-٧ جا٢هـ) ٠٠٠٠٠٠٠ الخ

قاعدة (٢٠٢) :-
لإيجاد معادلة أو بيانية القطعة المستقيمة العمودية د(هـ)=(جـ ، أ جاهـ+ب) الواصلة بين نقطتين . نضع أكبر قيمة من ص تساوي (أ+ب) و أصغر قيمة من ص تساوي (-أ+ب) ، جـ تأخذ قيمة س ٠

مثال (٢٠٢): أوجد بيانية القطعة المستقيمة الواصلة بين (١،٢) و (٧،١) ؟
الحل :-
د(هـ) = (جـ ، أ جا هـ + ب) ، جـ = ٢
، أ + ب = ٧ ،-أ + ب=٢ ⇐ أ =٣، ب=٤
∴ د(هـ) = (٢، ٣جا هـ+٤)

٣٠٢٠٢ القطعة المستقيمة المائلة

وهي القطعة المستقيمة التي لا تكون موازية لمحور السيني ولا المحور الصادي وإنما تكون مائلة ٠

وبيانية القطعة المستقيمة المائلة هي

د(هـ) = (أجا هـ +ب،جـ جاهـ + د) أو

د(هـ) = (أجتاهـ +ب ، جـ جتاهـ + د) حيث أ،ب ،جـ ،د أعداد حقيقية ⟵ (٣٠٢)

امثلة علي ذالك

١)د(هـ) =(جاهـ ،٢جاهـ)

٢) د(هـ) = (جتاهـ ، ١+ جتاهـ)

٣)د(هـ)=(٢جا٢هـ ، جا٣هـ) ٠٠٠٠٠٠٠٠٠إلخ

قاعدة (٣٠٢):-

لإيجاد بيانية القطعة المستقيمة المائلة الواصلة بين نقطتين

د(هـ) = (أجاهـ + ب ،جـ جاهـ + د) نتبع التالي

١) نضع (أ + ب) يساوي أكبر قيمة من س ، (-أ + ب) يساوي أصفر قيمة من س ، ثم نحل المعادلتين لإيجاد قيم أ ، ب

٢) ونضع (جـ + د) يساوي أكبر قيمة من ص ، (- جـ + د) يساوي أصفر قيمة من ص ، ثم نحل المعادلتين لإيجاد قيم كل من جـ ، د ٠

تعتبر الصورة البيانية (٣٠٢) هي الصورة البيانية العامة لأي قطعة مستقيمة ٠

مثال (٣٠٢) : أوجد بيانية القطعة المستقيمة الواصلة بين النقطتين (٢،٢) و(-٢ ، ٠)؟

الحل:-

٢ ≠ -٢ القطعة المستقيمة ليست عمودية

٢ ≠ ٠ القطعة المستقيمة ليست أوقفية

∴ القطعة المستقيمة هي قطعة مستقيمة مائلة

د(هـ) =(أجا هـ +ب ، جـ جا هـ +د)

ضع أ +ب = ٢ ، - أ + ب= -٢ ⇐ أ =٢،ب=٠

ثم نضع جـ + د =٢ ،جـ + د =٠ ⇐ جـ = ١ ، د = ١

∴ بيانية القطعة المستقيمة هي

د(هـ) = (٢جاهـ ، جاهـ + ١)

٤٠٢٠٢ ميل القطعة المستقيمة

كما هو معروف لدينا أن ميل الخط المستقيم ص= أس+ب هو أ ، فمثلاً ميل الخط المستقيم ص=س هو ١ وبما أن القطعة المستقيمة د(هـ) = (جاهـ ، جاهـ) هي مقطع من الخط المستقيم ص= س أو (هـ ، هـ) . أذن ميل القطعة المستقيمة د(هـ) =(جاهـ ، جاهـ) أيضاً هو ١ .

قاعدة (٤٠٢) :-

ميل القطعة المستقيمة هو مشتقة المحتوى الصادي مقسوم على مشتقة المحتوى السيني ،إي أن ميل القطعة المستقيمة د(هـ) =(أجا هـ + ب ، جـ جاهـ + د) هو

$$مـ = \frac{مشتقة(جـ جاهـ+د)}{مشتقة(أجاهـ+ب)} = \frac{جـ \ جتاهـ}{أ \ جتاهـ} = \frac{جـ}{أ}$$

$$\therefore \ مـ = \frac{جـ}{أ} \longrightarrow (٤٠٢)$$

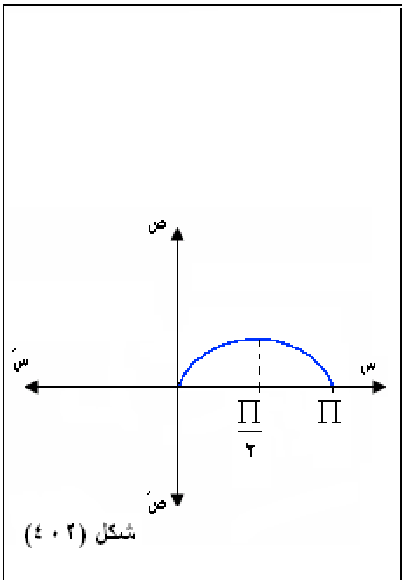
مثال (٤٠٢) :- أوجد ميل القطعة المستقيمة د(هـ) = (٢ جاهـ ، جاهـ)

الحـــــل:-

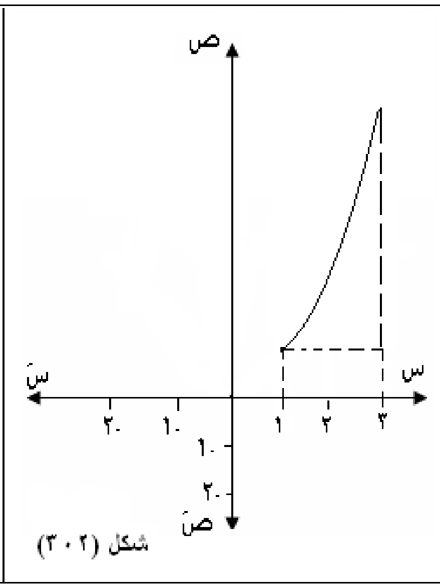
$$مـ = \frac{(جاهـ)'}{(٢جاهـ)'} = \frac{جتاهـ}{٢ \ جتاهـ} = \frac{١}{٢}$$

٣٠٢ المقطوع المنحني

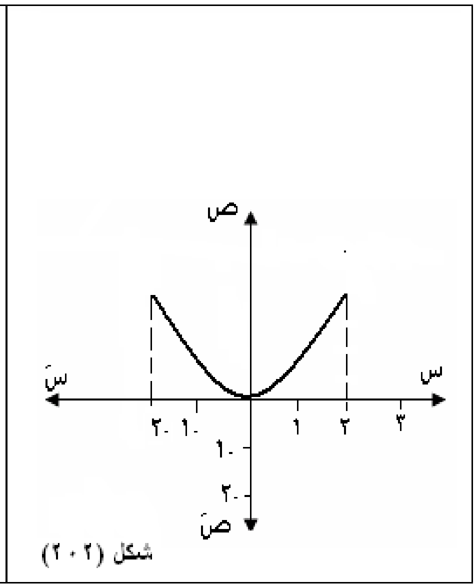
يمكن تقسيم البيانية إلى عدة أجزاء أو مقاطع وكل مقطع منها يمثل أيضاً بيانية (مقطع بياني) . وكل مقطع له خواص إلى حد ما يشبه أو نفس خواص البيانية الأصلية. أنظر الأشكال أسفل والتي تمثل مقاطع بيانية قطعت من بيانية.



شكل (٤٠٢)



شكل (٣٠٢)



شكل (٢٠٢)

فالشكل (٢٠٢)أعلى يمثل مقطع من البيانية (هـ ، $هـ^٢$) والواقع على الفترة [-٢،٢] وكذالك المقطع الواقع على الفترة [١،٣] في الشكل (٣٠٢) أعلى يمثل مقطع من البيانية

د(هـ) = (هـ ، هـ^{2}) ٠ أما الشكل (٤٠٢) يمثل مقطع من البيانية (هـ ، حاهـ) والواقع على الفترة [٠،π] أنظر الجدول (١٠٢) أسفل والذي يوضح الصورة البيانية لكل شكل من الأشكال السايقة٠

الأشكال	بيانية المقطع	مقطع من البيانية
شكل ٢٠٢	د(هـ) = (٢جاهـ ، ٤جا^{2}هـ)	د(هـ) = (هـ ، هـ٢)
شكل ٣٠٢	د(هـ) = (جاهـ +٢ ، (جاهـ +١) ^{2})	د(هـ) = (هـ ، هـ٢)
شكل ٤٠٢	د(هـ) = ($\frac{\pi}{2}$جاهـ + $\frac{\pi}{2}$، جا($\frac{\pi}{2}$جاهـ + $\frac{\pi}{2}$))	د(هـ) = (هـ ، جاهـ)

جدول(١٠١)

قاعدة (٥٠٢) :-
لإيجاد بيانية مقطع من أي منحنى نتبع الخطوات التالية :
١) نضع هـ = أ جاهـ + ب
٢) نوجد قيم أ ، ب وذالك بوضع
أ + ب = أكبر قيمة من س تقع طرف القطع
- أ + ب = أصغر قيمة من س تقع على الطرف الأخر من القطع
٣) نعوض (أجاهـ +ب) وفق البيانية د(هـ) = (س(هـ) ، ص(هـ))٠
د(أ حاهـ +ب) = (س(أ حاهـ +ب)،ص(أ حاهـ +ب))
٤) أخيراً نحصل على بيانية القطع وهي:
د(هـ) = (س(أ حاهـ +ب)،ص(أ حاهـ +ب)) ⟵(٥٠٢)

مثال(٥٠٢) :- أوجد بيانية القطع الواصل بين النقطتين (٣،٩) و(١،١) والواقع على المنحنى د(هـ) = (هـ ،هـ٣) ؟
الحل :-
١)نضع هـ = أجا هـ + ب
٢)نوجد قيم أ ،ب وذالك بوضع
أ + ب = ٣ ⟵ (١)
- أ + ب =١⟵ (٢)
من (١) و(٢) نستنتج
أ=١ ، ب =٢
∴ هـ = جاهـ + ٢
٣)نوجد صورة(جاهـ +٢) وفق البيانية (هـ ، هـ٣)
∴ د(جاهـ +٢) =(جاهـ +٢، (جاهـ +٢)^{3})
∴ د(هـ) = (جاهـ +٢، (جاهـ +٢)^{3})

مثال (٦٠٢):- أوجد بيانية القطع الواقع على المنحنى د(هـ) = (هـ ، جتاهـ) والواصل بين النقطة (٠،١) و النقطة (π،-١)؟

الحــل:

١) هـ = أحاهـ +ب

٢) نوجد قيم أ و ب وذالك بوضع

أ + ب = π

-أ + ب =صفر

⇐ أ= $\frac{\pi}{٢}$ و ب= $\frac{\pi}{٢}$

٣) د($\frac{\pi}{٢}$جاهـ + $\frac{\pi}{٢}$) =($\frac{\pi}{٢}$ جاهـ + $\frac{\pi}{٢}$ ، جتا($\frac{\pi}{٢}$ جاهـ + $\frac{\pi}{٢}$))

∴ د(هـ) = ($\frac{\pi}{٢}$ جاهـ + $\frac{\pi}{٢}$ ، جتا($\frac{\pi}{٢}$ جاهـ + $\frac{\pi}{٢}$))

٤٠٢ القطع الدائري

القطع الدائري أما أن يكون دائرة أو مقطع من دائرة وقد يكون قطع ناقص أو مقطع من قطع ناقص أو منحنى دائري أو مقطع من منحنى دائري حسب ما تمثلها الصورة البيانية لقطع دائري٠ فالصورة البيانية العامة لمقطوع هي كالتالي:

د(هـ) = (س(جتاهـ) ،ص(جاهـ)) ← (٦٠٢)

و هنا سوف نورد بعض الأمثلة على المقطوع الدائري:

١) د(هـ)= (جتاهـ ،جاهـ) تمثيل دائرة مركزها (٠،٠) ونصف قطرها ١

٢) د(هـ)= (٢جتاهـ ، ٢جاهـ +١) تمثل دائرة مركزها (٠،١) ونصف قطرها ٢

٣) د(هـ)= (جتا^{٢}هـ ، جا^{٢}هـ) تمثل ربع دائرة مركزها (٠،٠) ونصف قطرها ١

٤) د(هـ) = (٢جتاهـ ، جاهـ) تمثل قطع ناقص

٥) د(هـ) = (جتاهـ ، ٢جاهـ +١) تمثل قطع ناقص

٦) د(هـ) = (جتاهـ + جاهـ ، جاهـ)

٧) د(هـ) = (جتا^{٢}هـ +١ ، جاهـ +جا^{٢}هـ)

٨) د(هـ) = (جاهـ +١ ، ٢جتاهـ -٣) وغيرها من الأمثلة ٠

٢٠٤٠١ بيانيـة دائرة

الصورة البيانيـة لدائرة مركزها (٠،٠) تعطى بـالصورة التاليـة:

د(هـ) = (أ جتاهـ ، أ جاهـ) ، نق=|أ| ← (٢٠٧)

و الصورة البيانيـة لدائرة مركزها (ب ، جـ) تعطى بـالصورة التاليـة:

د(هـ) = (أ جتاهـ + ب، أ جاهـ + جـ) ، نق=|أ| ← (٢٠٨)

حيث أ،ب،جـ أعداد حقيقيـة٠

مثال (٢٠٧):- أوجد بيانيـة الدائرة التي مركزها (٠،٠) ونصف قطرها يسـاوي ٣ وحدة ؟

الحل:-

الصورة البيانيـة لدائرة مركزها (٠،٠) هي

د(هـ) = (أ جتاهـ ، أ جاهـ) ، أ=٣

د(هـ) =(٣جتاهـ ، ٣حاهـ)

مثال (٢٠٨) :- أوجد بيانيـة الدائرة التي مركزها (١،٢) ونصف قطرها يسـاوي ٢ ؟

الحل:-

الصورة البيانيـة للدائرة هي

د(هـ) = (أجتاهـ +ب ، أحاهـ +حـ)

أ=٢ ، (ب،جـ)=(١،٢)

د(هـ)=(٢جتاهـ +١ ، ٢ جاهـ +٢)

٢٠٤٠٢ بيانيـة القطع الناقص

الصورة البيانيـة للقطع النـاقص مركزه (ب،د) تعطى بـالصورة البيانيـة التاليـة:

د(هـ) = (أ جتاهـ +ب ، جـ جاهـ + د) ←(٢٠٩)

حيث أ،ب،حـ ،د أعداد حقيقيـة ، أ ≠ جـ

مثال (٢٠٩):- أوجد معـادلـة القطع النـاقص و الذي مركزه (٠،٠) وطول محوره السينـي يسـاوي ٤

وطول محوره الصـادي يسـاوي ٦ ؟

الحل:-

الصورة البيانيـة للقطع النـاقص هي

د(هـ) = (أ جتاهـ +ب ، جـ جاهـ + د) ، (ب ، د)=(٠،٠)

طول المحور السينـي =٢أ=٤ ⇐ أ= $\frac{٤}{٢}$ =٢

وطول المحور الصـادي=٢جـ =٦ ⇐ جـ = $\frac{٦}{٢}$ =٣

د(هـ) =(٢جتاهـ ، ٣جاهـ)

مثال (١٠٠٢) :- أوجد معادلة القطع الناقص والذي مركزه (٢،١) وطول المحور السيني هو ٤ وطول المحور الصادي هو ٦ ؟

الحل:-

طول المحور السيني =٢أ=٤ ⇐ أ= $\frac{٤}{٢}$ =٢

وطول المحور الصادي=٢جـ =٦ ⇐ جـ = $\frac{٦}{٢}$ =٣

د(هـ) =(٢جتاهـ + ١ ، ٣جاهـ +٢)

٥٠٢ مشتقة المقطوع البياني

كما هو معلوم لدينا أن القطع البياني د(هـ)=(جاهـ ، جا^{٢}هـ) هو مقطع من البيانية د(هـ)=(هـ ،هـ^{٢}) ٠ وإن مشتقة البيانية د(هـ)=(هـ ، هـ^{٢}) هي البيانية د(هـ)=(هـ ،٢هـ) ٠ أذن مشتقة القطع البياني (جاهـ ، جا^{٢}هـ) هو أيضاً مقطع من مشتقة البيانية (هـ ، هـ^{٢}) ٠ وبما أن المقطع د(هـ) = (جاهـ ،٢حاهـ) هو مقطع من البيانية د(هـ)=(هـ ،٢هـ) على نفس الفترة [-١،١] ٠ أذن مشتقة البيانية (جاهـ ،جا^{٢}هـ) هي البيانية (جاهـ ، ٢جاهـ)٠

قاعدة (٨٠٢) :-

١) مشتقة بيانية القطعة المستقيمة د(هـ)=(س(جاهـ) ، ص(جاهـ))هي البيانية

دَ(هـ)=(س(جاهـ) ، $\frac{\text{صَ(جاهـ)}}{\text{سَ(جاهـ)}}$) ← (١٠٠٢)

حيث

صَ(جاهـ) = $\frac{\text{ءص(جاهـ)}}{\text{ءهـ}}$ ، سَ(جاهـ) = $\frac{\text{ءس(جاهـ)}}{\text{ءهـ}}$

٢) مشتقة القطع البياني د(هـ) =(س(جتاهـ) ، ص(جاهـ)) هو القطع البياني

دَ(هـ)=(س(جاهـ) ، $\frac{\text{صَ(جاهـ)}}{\text{سَ(جتاهـ)}}$) ← (١١٠٢)

حيث

صَ(جاهـ) = $\frac{\text{ءص(جاهـ)}}{\text{ءهـ}}$ ، سَ(جتاهـ) = $\frac{\text{ءس(جتاهـ)}}{\text{ءهـ}}$

مثال (١١٠٢) :- أوجد مشتقة البيانية د(هـ) = (جتاهـ ، جاهـ)

الحل:-

د(هـ) = (جتاهـ ، جاهـ)

صَ= $\frac{\text{ءص}}{\text{ءهـ}}$ =(جاهـ)َ=جتاهـ

سَ= $\frac{\text{ءس}}{\text{ءهـ}}$ =(جتاهـ)َ =-جاهـ

دَ(هـ) = (جتاهـ ، $-\frac{\text{جتاهـ}}{\text{جاهـ}}$) =(جتاهـ ، - ظتاهـ)

د(هـ) =(جتاهـ ، - ظتاهـ)

مثال (١٢٠٢):- أوجد دً(هـ) للقطعة المستقيمة (جاهـ ، ٢جاهـ +٣)

الحل:-

د(هـ)= (جاهـ ، ٢جاهـ +٣)

دَ(هـ) = (جاهـ ، $\frac{\text{٢ جتاهـ}}{\text{جتاهـ}}$)=(جاهـ ، ٢)

دً(هـ) = (جاهـ ، $\frac{\text{صفر}}{\text{جتاهـ}}$)=(جاهـ ، صفر)

دً(هـ) =(جاهـ ، صفر)

مثال (١٣٠٢):- أوجد مشتقة د(هـ) = (جاهـ ، $\frac{١}{٢}$جا^{٢}هـ) عند

١)هـ =٣٠° ٢) س= $\frac{١}{\sqrt{٢}}$

الحل:

١) عندما هـ = ٣٠°

د(هـ) = (جاهـ ، $\frac{١}{٢}$جا^{٢}هـ)

دَ(هـ)=(جاهـ ، $\frac{١}{٢}$ $\frac{\text{٢جاهـ جتاهـ}}{\text{جتاهـ}}$)=(جاهـ ،جاهـ)

دَ(هـ)=(جاهـ ، جاهـ)

دَ(هـ) =(جا٣٠ ، جا٣٠)=($\frac{١}{٢}$ ، $\frac{١}{٢}$)

٢) عند ما س= $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ ⇐ جاهـ = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ ⇐ هـ = جا$^{-١}$ ($\frac{١}{\sqrt{٢}}$) =٤٥°

∴ عندما س= $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ ⇐ هـ =٤٥

دَ(هـ) =(جاهـ ، جاهـ)

دَ(٤٥)=(جا٤٥ ، جا٤٥)=($\frac{١}{\sqrt{٢}}$ ، $\frac{١}{\sqrt{٢}}$)

∴ دَ(٤٥)= ($\frac{١}{\sqrt{٢}}$ ، $\frac{١}{\sqrt{٢}}$)

٦٠٢ تكامل المقطوع البياني

تكامل الدالـة ص= ٢س هـي الدالـة ص=س^{٢} + ث و الدالـة ص= س هـي نفسـها البيانيـة د(هـ)=(هـ،٢هـ)٠ وكذالك الدالة ص=س^{٢} + ث هي نفسـها البيانيـة (هـ ،هـ^{٢} + ث)٠ أي أن تكامل البيانية (هـ ، ٢هـ) هي البيانية (هـ ،هـ^{٢} + ث)٠
وبما أن المقطع البياني (جاهـ ، ٢ جاهـ) هو مقطع من البيانية (هـ ، ٢هـ) ،أذن تكامل المقطع البياني (جاهـ ، ٢جاهـ) هو أيضا مقطع من البيانية (هـ ،هـ^{٢}+ث)أي أن تكامل المقطع البياني (جاهـ ، ٢جأهـ) هو المقطع البياني (جاهـ ، جا^{٢}هـ + ث)

قاعدة (٩٠٢):-   ١) تكامل بيانية القطة المستقيمة د(هـ)=(س(حاهـ)، ص(هـ)) هي البيانية   د(هـ)=(س(جاهـ) ، ∫سَ(جاهـ) ص(جاهـ) ءهـ)← ١٢٠٢   حبث سَ(جاهـ)= ءس(جاهـ) / ءهـ   ٢) تكامل بيانية القطع د(هـ)=(س(جتاهـ) ، ص(جاهـ)) هي البيانية   د(هـ)=(س(جتاهـ) ، ∫سَ(جتاهـ) ص(جاهـ) ءهـ)← ١٣٠٢   حيث سَ(جتاهـ) = ءس(جتاهـ) / ءهـ

مثال (١٤٠٢): أوجد تكامل كل من البيانيتين التاليـة؟
أ) د(هـ) = (أجاهـ +ب ، جـ جاهـ +د)
ب) د(هـ) = (١- جاهـ ، ٤جاهـ)
الحل:
أ) د(هـ) = (أجاهـ +ب ، جـ جاهـ +د)
س(جاهـ) = أ جاهـ + ب ، سَ(جاهـ)=أجتاهـ
ص(هـ) =∫سَ(جاهـ) ص(جاهـ) ءهـ
=∫ أجتاهـ(جـ جاهـ + د) ءهـ
=أ(حـ∫جتاهـ جاهـ ءهـ +د∫ جتاهـءهـ)
=أ($\frac{١}{٢}$جـ ∫ جا٢هـ ءهـ+ د جاهـ)
=أ(-$\frac{١}{٤}$جـ جتا٢هـ + د جاهـ)= أ(د جاهـ - $\frac{١}{٤}$ جـ جتا٢هـ)
∵جتا٢هـ = ١ ــ ٢ جا^{٢}هـ
ص(هـ)= أ (د جاهـ + $\frac{١}{٢}$جـ جا^{٢}هـ - $\frac{١}{٤}$جـ) = أ($\frac{١}{٢}$جـ جا^{٢}هـ + د جاهـ - $\frac{١}{٤}$ جـ)
∴تكامل (أجاهـ +ب ، جـ جاهـ +د)= (أجاهـ +ب، أ($\frac{١}{٢}$جـ جا^{٢}هـ + د جاهـ - $\frac{١}{٤}$ جـ))

ب) د(هـ) = (١- جاهـ ، ٤جاهـ)

∴ ∫ (أجاهـ +ب ، جـ جاهـ +د) ءهـ= (أجاهـ +ب، أ($\frac{١}{٢}$ جـ جا^{٢} هـ + د جاهـ - $\frac{١}{٤}$ جـ))

ضع أ=-١ ،ب=١ ، جـ =٤ ، د=٠

∴∫ (١- جاهـ ، ٤جاهـ) ءهـ = (١-جاهـ ، ٢ جا^{٢} هـ - $\frac{١}{٢}$)

مثال (١٥٠٢): أوجد تكامل مايلي؟

أ) د(هـ) = (جتاهـ ،١)

ب) د) د(هـ) = (جتاهـ ، جاهـ)

الحل:

أ) د(هـ) = (جتاهـ ،١)

س(جتاهـ)=جتاهـ ، سَ= -جاهـ

ص(جتاهـ)=∫ -جاهـءهـ = جتاهـ

∴∫د(هـ) ءهـ =(جتاهـ ، جتاهـ)

أي أن تكامل البيانية (جتاهـ ، ١) هي البيانية (جتاهـ ، جتاهـ)

ب) د(هـ) = (جتاهـ ، جاهـ)

س(جتاهـ)=جتاهـ ، سَ(جتاهـ)= -جاهـ

ص(جتاهـ)= ∫ - جاهـ جاهـ ءهـ =∫ -جا^{٢} هـ ءهـ

∴∫ - جا^{٢} هـ ءهـ = $\frac{١}{٤}$جتا٢هـ - $\frac{١}{٢}$ هـ

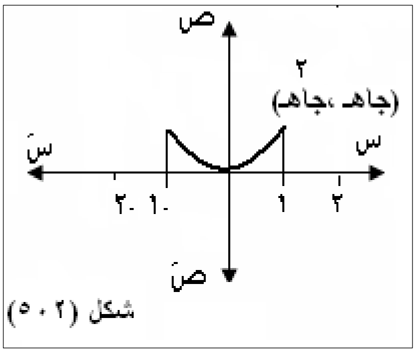
∴ تكامل (جتاهـ ، جاهـ) = (جتاهـ ، $\frac{١}{٤}$جتا٢هـ - $\frac{١}{٢}$ هـ)

٧٠٢ نظريـة البصمـة البيانيـة

نظريـة البصمـة البيانيـة تنص التـالي :-

لدراسـة أو معرفـة بيانيـة يكفى فقط أخذ مقطع من تلك البيانيـة والذي يـعطي نفس خواص البيانيـة إلى حد ما٠

أنظر الشكل(٥٠٢) أسـفل الذي يمثل مقطع من منحنى بيانـي



شكل (٥٠٢)

المطلوب أيجاد بيانيـة المنحنى والذي قطع منه المقطع (جاهـ ، جا^{٢}هـ) ٠يكفننا أن نأخذ ثلاث نقاط من المقطع (جاهـ ، جا^{٢}هـ) لإيجاد بيانيـة المنحنى كما هو موضح في الجدول (١٠٢) وهن كالتالي(-١،١) ، (٠،٠) ، (١،١) ٠

هـ	س=جاهـ	ص= جا^{٢}هـ	(س ، ص)
٩٠-	١-	١	(-١،١)
صفر	صفر	صفر	(٠،٠)
٩٠	١	١	(١،١)

جدول (١٠٢)

معلوم من المقطع أنه يمثل معادلة منحنى من الدرجة الثالثة ص=أس٢ +ب س +جـ
عندما س=٠ ، ص=٠ ⇐ حـ =٠ ← (١)
عندما س=-١ ، ص=١ ⇐ أ-ب=١ ← (٢)
عندما س=١ ، ص=١ ⇐ أ+ب=١ ← (٣)
من (٢) ، (٣) ينتج أن أ=١ ، ب=٠
∴ معادلة المنحنى هي ص=س٢ والتي تكافئ البيانية (هـ ، هـ٢)
∴ القطع البيانـي (جاهـ ، جا^{٢}هـ) هو جزء أو مقطع من منحنى البيانيـة (هـ ، هـ٢) ٠

مثال (١٦٠٢) :-أوجد طرفي القطعة المستقيمة د(هـ)=(جاهـ ،٣جاهـ -١) وكذالك المستقيم الذي أخذ منه القطعة؟

الحل:-

ضع هـ = $\frac{\pi}{٢}$ ، $\frac{-\pi}{٢}$

عندما هـ = $\frac{\pi}{٢}$ ⇐ د($\frac{\pi}{٢}$) =(جا$\frac{\pi}{٢}$ ، ٣جا$\frac{\pi}{٢}$ -١)=(١،٢)

عندما هـ = $\frac{-\pi}{٢}$ ⇐ د($\frac{-\pi}{٢}$)=(جا$\frac{-\pi}{٢}$ ، ٣جا$\frac{-\pi}{٢}$ -١) =(-١،-٤)

∴ الطرف الأول هي النقطة (١،٢) والطرف الأخر هي النقطة (-١،-٤)

معادلة المستقيم الذي يمر بالنقطتين (١،٢) و(-١،-٤) هي البيانية
د(هـ)=(هـ ، ٣هـ -١)

الفصل الثالث :

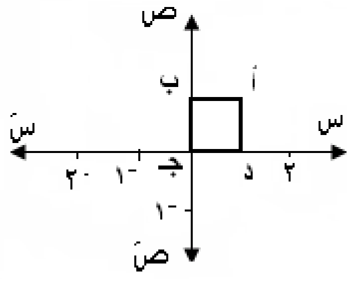
بيانية المربع و المستطيل

١٠٣ المقدمة

في هذا الفصل سوف نحاول إيجاد الصورة البيانية للإشكال الرباعية مثل المربع والمستطيل والتي بدورها ستكون المدخل إلى أشكال هندسية أخرى ٠ فكما هو معروف لدينا أن الصورة البيانية للدائرة تعطى كما يلي:

د(هـ)= (أ جتاهـ +ب ، أ جاهـ +حـ)

حيث (ب،جـ) يمثل مركز الدائرة ، |أ| يساوي نصف قطر الدائرة٠ والسؤال هنا هل يمكن وضع صورة بيانية عامة مثلاً للمربع والمستطيل ٠



شكل (١٠٣)

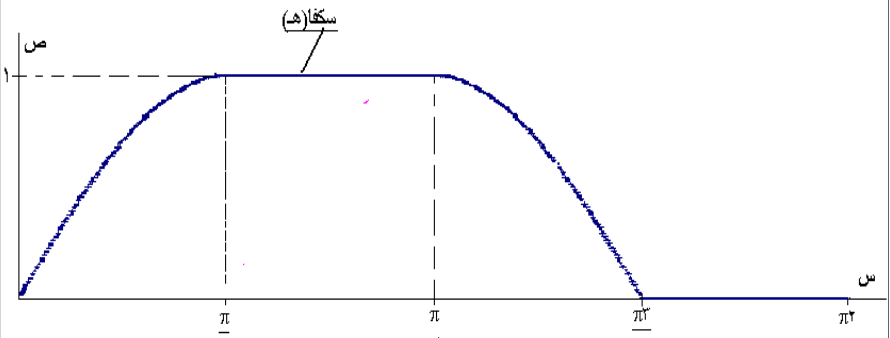
فلو نظرنا إلى الشكل (١٠٣) أعلى والذي يمثل المربع أ ب جـ د ٠هل بالمكن تمثيل هذا المربع بالصورة البيانية د(هـ) =(س(هـ) ، ص(هـ)) وما هي الصورة البيانية الرياضية لهذا الشكل؟ الجواب نعم وهذا أن شاء الله سوف نوضحه خلال هذا الفصل٠

٢٠٣ الدالتان سكفا و سلفا

فالدالة سكفا(هـ) تعطى كالتالي

$$\text{سكفا(هـ)} = \begin{cases} \text{جاهـ} & ، \quad ٠ \le \text{هـ} \le \frac{\pi}{٢} \\ ١ & ، \quad \frac{\pi}{٢} \le \text{هـ} \le \pi \\ -\text{جتاهـ} & ، \quad \pi \le \text{هـ} \le \frac{٣\pi}{٢} \\ ٠ & ، \quad \frac{٣\pi}{٢} \le \text{هـ} \le ٢\pi \end{cases}$$

أنظر الشكل (٢٠٣) أسفل و الذي يمثل منحنى البيانية د(هـ) =(هـ ، سكفاهـ)

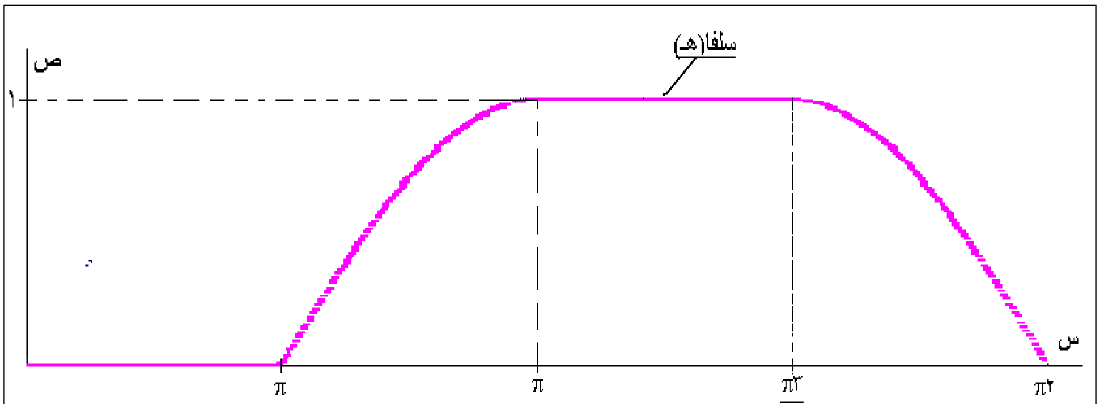


شكل (٢٠٣)

أما الدالة سلفا (هـ) فتعطى كالتالي

$$\text{سلفا(هـ)} = \begin{cases} \cdot & \text{،} \quad \cdot \le \text{هـ} \le \frac{\pi}{٢} \\ -\text{جتاهـ} & \text{،} \quad \frac{\pi}{٢} \le \text{هـ} \le \pi \\ ١ & \text{،} \quad \pi \le \text{هـ} \le \frac{٣\pi}{٢} \\ -\text{جاهـ} & \text{،} \quad \frac{٣\pi}{٢} \le \text{هـ} \le ٢\pi \end{cases}$$

علماً بان الدالتين هما دالتان دورية و دورهما هو ٢π • أنظر الشكل (٣٠٣) أسفل و الذي يمثل منحنى البيانية د(هـ) = (هـ ، سلفاهـ)



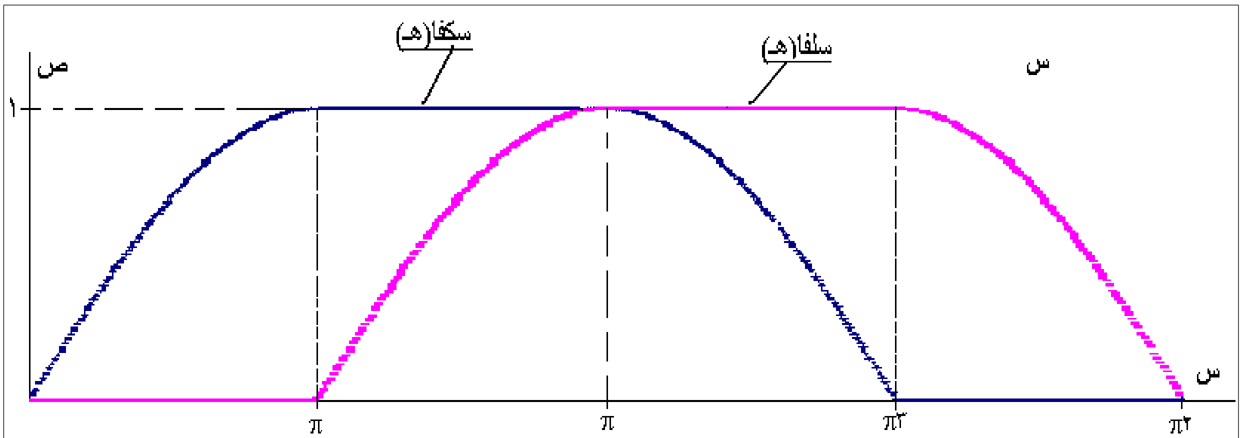
شكل (٣٠٣)

١٠٢٠٣ العلاقة بين سكفا و سلفا

فالعلاقة بين الدالة سكفا و الدالة سلفا تعطى بالعلاقة التالية :

$$\boxed{\text{سكفا(هـ)} = \text{سلفا}\left(\text{هـ} - \frac{\pi}{٢}\right) \quad \leftarrow \quad (١٠٣)}$$

أنظر الشكل (٤٠٣) أسفل و الذي وضح العلاقة أكثر بين الدالة سكفا و الدالة سلفا •



شكل (٤٠٣)

مثال (٣٠١) : مثل ما يلي بيانياً؟

١) د(هـ) = (سكفاهـ،جاهـ)

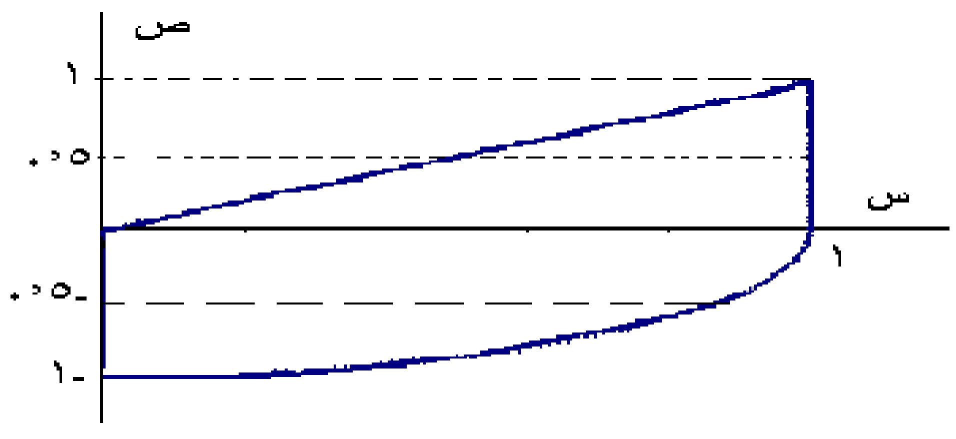
٢) د(هـ) = (هـ، سكفاهـسلفاهـ)

٣) د(هـ) = (سكفاهـ، سلفاهـ)

الحل:

١) د(هـ) = (سكفاهـ،جاهـ)

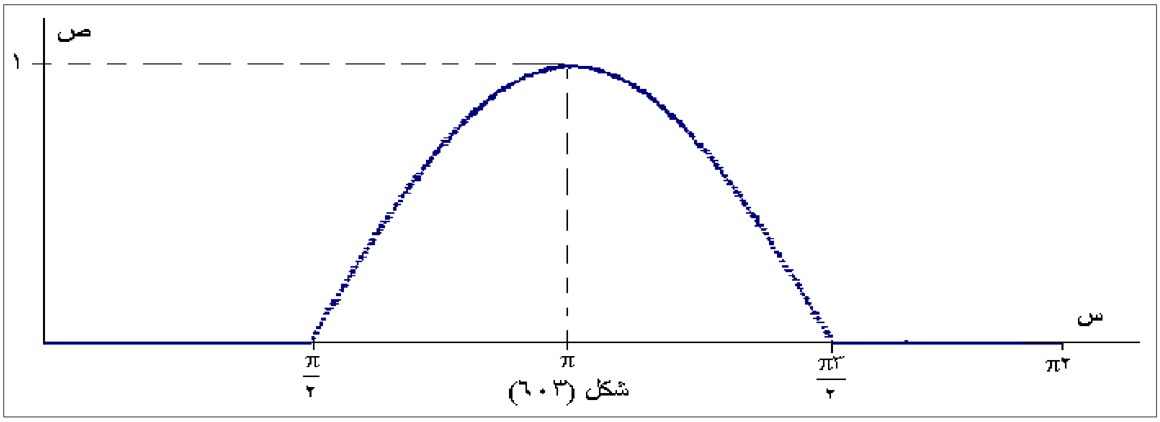
هـ	س=سكفاهـ	ص=حاهـ	(س،ص)
$٠ \leq$ هـ $\leq \frac{\pi}{٢}$	جاهـ	حاهـ	(حاهـ، حاهـ)
$\frac{\pi}{٢} \leq$ هـ $\leq \pi$	١	حاهـ	(١، حاهـ)
$\pi \leq$ هـ $\leq \frac{٣\pi}{٢}$	- جتاهـ	حاهـ	(- جتاهـ، حاهـ)
$\frac{٣\pi}{٢} \leq$ هـ $\leq ٢\pi$	٠	حاهـ	(٠، حاهـ)



شكل (٣٠٥)

٢) د(هـ) = (هـ ، سكفاهـ سلفاهـ)

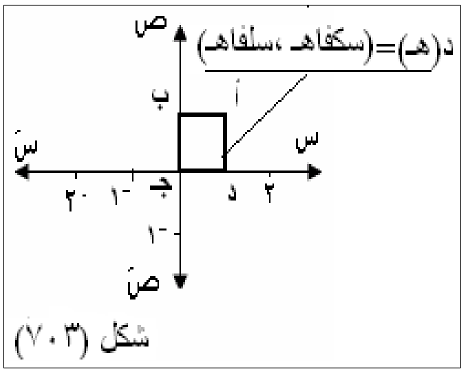
هـ	سكفاهـ	سلفاهـ	ص= سكفاهـ ء سلفاهـ	(س،ص)
٠ ≤ هـ ≤ $\frac{\pi}{٢}$	جاهـ	٠	٠	(هـ ، ٠)
$\frac{\pi}{٢}$ ≤ هـ ≤ π	١	-جتاهـ	- جتاهـ	(هـ ، - جتاهـ)
π ≤ هـ ≤ $\frac{٣\pi}{٢}$	- جتاهـ	١	- جتاهـ	(هـ ، - جتاهـ)
$\frac{٣\pi}{٢}$ ≤ هـ ≤ ٢π	٠	-جاهـ	٠	(هـ ، ٠)



شكل (٦٠٣)

٣) د(هـ) = (سكفاهـ ، سلفاهـ)

هـ	س= سكفاهـ	ص= سلفاهـ	(س،ص)
٠ ≤ هـ ≤ $\frac{\pi}{٢}$	جاهـ	٠	(جاهـ ، ٠)
$\frac{\pi}{٢}$ ≤ هـ ≤ π	١	- جتاهـ	(١ ، - جتاهـ)
π ≤ هـ ≤ $\frac{٣\pi}{٢}$	- جتاهـ	١	(- جتاهـ ، ١)
$\frac{٣\pi}{٢}$ ≤ هـ ≤ ٢π	٠	-جاهـ	(٠ ،- جاهـ)



شكل (٧٠٣)

٣٠٤ بيانيـة المربع والمستطيل

يمكن تمثيل الشكل المستطيل بيانياً بالصورة البيانية التالية :

د(هـ) = (أ سكفاهـ + ب ، جـ سلفاهـ + د) ، أ≠جـ ← (٣٠٢)

حيث أ يمثل طول المستطيل ، جـ يمثل عرض المستطيل.
أما (ب ،د) تمثل إحداثيات أول إحدى أركان المستطيل ، فعندما هـ=٠ ⇐ د(٠)=(ب،د).
أمثلة على ذالك

١) د(هـ) = (٢ سكفاهـ ، سلفاهـ)
٢) د(هـ) = (سكفاهـ ، ٣سلفاهـ +١)
٣) د(هـ) = (٣سكفاهـ + ٢ ، ٢سلفاهـ -٢)

أما بالنسبة لبيانية المربع يمكن الحصول عليها من الصورة البيانية (٣٠١)
وذالك بوضع أ=جـ

د(هـ) = (أ سكفاهـ + ب ، أ سلفاهـ + د) ← (٣٠٣)

حيث أ يمثل طول أحد أضلاع المربع . (ب ،د) تمثل إحداثيات أول إحدى أركان المربع,
أمثلة على ذالك

١) د(هـ) = (سكفاهـ ،سلفاهـ)
٢) د(هـ) =(١+سكفاهـ ، سلفاهـ)
٣) د(هـ) = (٢سكفاهـ ، ٢+سلفاهـ)

قاعدة (٢٠٣):-
لإيجاد بيانية الشكل المستطيل د(هـ) = (أ سكفاهـ + ب ،جـ سلفاهـ+ د) نتبع التالي
١) أ = أكبر قيمة من س – أصغر قيمة من س ، ب = أصغر قيمة من س
٢) جـ = أكبر قيمة من ص – أصغر قيمة من ص ، د = أصغر قيمة من ص
* تعتبر الصورة البيانية (٣٠٢) هي الصورة البيانية للمستطيل وللمربع وذالك عندما أ=جـ

مثال(٢٠٣):- أوجد بيانية الشكل الرباعي والواقع أركانه على نقاط الإحداثيات التالية (١،١) ، (٣،١) ،(٣،٥) ،(١،٥)؟
الحل:
د(هـ) = (أ سكفاهـ + ب ، جـ سلفاهـ + د)
أ=٣-١=٢ ،جـ =٥-١=٤ ⇐ $\boxed{\text{أ=٢}}$. $\boxed{\text{جـ=٤}}$
ب=(أصغر قيمة من س)=١ ، د=(أصغر قيمة من ص)=١ ⇐ $\boxed{\text{ب=١}}$ ، $\boxed{\text{د=١}}$
بيانية الشكل الرباعي(المستطيل) هي
د(هـ) = (٢ سكفاهـ +١ ، ٤ سلفاهـ +١)

مثال(٣٠٣): أوجد بيانية المستطيل والذي إحداثيات اثنتان من أركانه واقعة على النقاط (-٣،١) ، (١،-١)؟
الحل:
∵النقطة (-٣،١) ، والنقطة (١،-١) لا يقعان على خط مستقيم واحد يوازي محور السيني أو المحور الصادي
أي أن النقطتين (-٣،١) ، (١،-١) تقعان على ركين متقابلين ،
ومما سبق نستنتج أن النقطتان الآخران هما (١،١) ،(-٣،-١)
∴ إحداثيات أركان المستطيل هي (-٣،-١) ،(١،-١) ،(١،١)،(-٣،١)
أ=١-(-٣)=٤ ، ب=-٣ ، جـ =١-(-١)=٢ ، د=-١
د(هـ) = (٤سكفاهـ -٣ ، ٢سلفاهـ -١)

مثال(٤٠٣): أوجد طول و عرض المستطيل في كل ما يلي ؟
١) د(هـ) = (٢ سكفاهـ ، ١+ سلفاهـ)
٢) د(هـ)=(سلفاهـ ،١+ ٣سلفاهـ)
٣) د(هـ) =(- ٢سكفاهـ ، سلفاهـ)
الحل:
١) د(هـ) = (٢ سكفاهـ ، ١+ سلفاهـ)
طول المستطيل = |أ|=|٢|=٢
عرض المستطيل =|جـ|=|١|=١
٢) د(هـ)=(سلفاهـ ،١+ ٣سلفاهـ)
طول المستطيل = |جـ|=|٣|=٣
عرض المستطيل = |أ|=|١|=١
٣) د(هـ) =(- ٢سكفاهـ ، سلفاهـ)
طول المستطيل =|أ|=|-٢|=٢
وعرضه=|جـ|=|١|=١

مثال (٥٠٣) : أوجد أحداثيات أركان المستطيل في كل ما يلي؟
١) د (هـ) = (١+سكفاهـ ، ٢سلفاهـ)
٢) د (هـ) =(-٢سكفاهـ ، ١- سلفاهـ)

الحل:

١)د(هـ) = (١+سكفاهـ ، ٢سلفاهـ)
نضع سكفاهـ=٠،١،١،٠ و نضع سلفاهـ = ٠،٠،١،١ كما هو موضح في الجدول أسفل

سكفاهـ	سلفاهـ	س=١+سكفاهـ	ص=٢سلفاهـ	(س،ص)
٠	٠	١	٠	(١،٠)
١	٠	٢	٠	(٢،٠)
١	١	٢	٢	(٢،٢)
٠	١	١	٢	(١،٢)

إحداثيات أركان المستطيل هي (١،٠)،(٢،٠)،(٢،٢)،(١،٢)

٢)د(هـ)=(-٢سكفاهـ ، ١- سلفاهـ)

سكفاهـ	سلفاهـ	س=-٢سكفاهـ	ص=١- سلفاهـ	(س،ص)
٠	٠	٠	١	(٠،١)
١	٠	-٢	١	(-٢،١)
١	١	-٢	٠	(-٢،٠)
٠	١	٠	٠	(٠،٠)

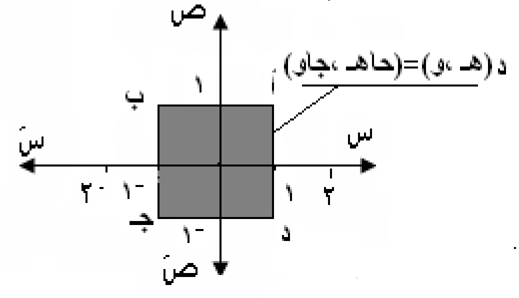
إحداثيات أركان المستطيل هي (٠،١) ، (-٢،١) ، (-٢،٠) ،(٠،٠)

الفصل الرابع :

بيانية السطوح

١٠٤ المقــدمــة

السطح البياني هو مجموعـة من نقـاط الإحداثيات (س ، ص) المتواجدة فـي إطـار سـطح مغلـق أو مفتوح أو سـطح شبـه مغلق والتـي تـشكل مسـاحة سـطح ربـاعي أو دائـري أو غيـر ذالـك ٠ أنظـر الـشكل (١٠٤) والـذي يمثـل مـساحة مربــع أ ب جــ د والمحـدد بــالقطع المـستقيمة (١،جاهـ)،(-١،جاهـ)،(جاهـ ،١)،(جاهـ ،-١) ٠



شكل (١٠٤)

فلو نظرنـا إلي الشكل (١٠٣) أعلي لوجدنـا أنـة يحتوي على مجموعـة من نقـاط الإحداثيات مثل (-١،١)،(-١،-١)،($\frac{١}{٢}$ ، $\frac{١}{٢}$) ،($\frac{١}{٢}$ ، $\frac{١}{٣}$) ،($\frac{١}{\sqrt{٢}}$ ، ١) ،(٠،٠) وغيرها من النقاط المتواجد ضمن السطح المغلق أ ب جـ د ٠

ونلاحظ أيضـا هناك مجموعـة من نقـاط التي لا تمثل هذا السطح مثل (٢،١)،(٢،٢) ،(٤،٣) وغيرها من النقـاط التي لا تنتمي إلي هذا السطح وتسمي كل نقطـة إحداثيـة تنتمي إلي السطح أ ب جـ د نقطـة بيانيـة ضمن البيانيـة د (هـ ،و)= (جا هــ ،جا و) وتـسمى كل نقطـة لا تنتمـي إلى السطح أ ب جـ د نقطـة غير بيانيـة ضمن البيانيـة د(هـ ، و)= (جا هـ ، جا و) ٠

٢٠٤ الصـورة البيانيـة للسطوح

الصـورة العـامـة للسطوح البيانيـة تـعطى بـالشكل الأتـي:

د(هـ ، و) = (س(هـ ،و) ، ص(هـ ،و)) ← (١٠٤)

حيث هـ ، و متغيرات حقيقيـة .

س(هـ ،و) يمثل المحور السيني و محتواه يعتمد على قيم هـ ،و

ص(هـ ،و) يمثل المحور الصـادي ومحتواه أيضـاً يعتمد على قيم المتغيرات هـ ، و

و تسمى الصورة البيانيـة (١٠٣) بيانيـة محوران ذات متغيرين ، ويسمى(هـ) البياني الأول ،(و) البيانـي الثانـي ٠

وفما يلي سوف نورد بعض الأمثلـة على السطوح البيانيـة:

١) د(هـ ، و) = (جاهـ ، جا و)
٢) د(هـ ، و) = (١+جاهـ ، ٢حا و)
٣) د(هـ ، و) = (جاهـ + جتا و ، حا و)
٤) د(هـ ، و) = (هـ٢ ، و +١)
٥) د(هـ ، و) = (هـ + و ،هـ)
٦) د(هـ ، و) = (جاهـ ، و)
٧) د(هـ ، و) = (و +١ ،هـ + جتا و)

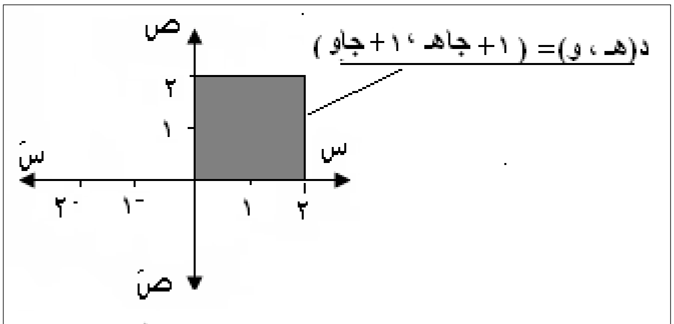
مثال (١٠٣) :- ارسم السطح التالي بيانياً؟

د(هـ ، و) = (١ + جاهـ ، ١ + جاو)

الحل:-

هـ	و	س=١+جاهـ	ص=١+جاو	(س ، ص)
٩٠	٩٠	٢	٢	(٢ ، ٢)
٩٠	٣٠	٢	١و٥	(٢، ١و٥)
٩٠	٠	٢	١	(٢، ١)
٩٠	-٣٠	٢	٠و٥	(٢، ٠و٥)
٩٠	-٩٠	٢	٠	(٢،٠)
٣٠	٩٠	١و٥	٢	(١و٥، ٢)
٣٠	٣٠	١و٥	١و٥	(١و٥، ١و٥)
٣٠	٠	١و٥	١	(١و٥،١)
٣٠	-٣٠	١و٥	٠و٥	(١و٥، ٠و٥)
٣٠	-٩٠	١و٥	٠	(١و٥، ٠)
٠	٩٠	١	٢	(١، ٢)
٠	٣٠	١	١و٥	(١، ١و٥)
٠	٠	١	١	(١، ١)
٠	-٣٠	١	٠و٥	(١، ٠و٥)
٠	-٩٠	١	٠	(١، ٠)
-٣٠	٩٠	٠و٥	٢	(٠’٥، ٢)
-٣٠	٣٠	٠و٥	١’٥	(٠و٥، ١و٥)
-٣٠	٠	٠و٥	١	(٠و٥، ١)
-٣٠	-٣٠	٠و٥	٠و٥	(٠و٥، ٠و٥)
-٣٠	-٩٠	٠و٥	٠	(٠و٥، ٠)
-٩٠	٩٠	٠	٢	(٠،٢)
-٩٠	٣٠	٠	١و٥	(٠، ١و٥)
-٩٠	٠	٠	١	(٠،١)
-٩٠	-٣٠	٠	٠و٥	(٠، ٠و٥)
-٩٠	-٩٠	٠	٠	(٠،٠)

جدول (١٠٤)



شكل (٢٠٤)

٣٠٤ أنواع السطوح البيانية

هناك ثلاثة أنواع من السطوح البيانية وهي:

١) السطح المغلق

٢) السطح شبه المغلق أو السطح شبه المفتوح

٣) السطح المفتوح (السطح الشامل) ٠

١٠٣٠٤ السطح المغلق

السطح المغلق و هو السطح الذي يكون مغلق من جميع الاتجاهات , والصورة البيانية العامة لسطح مغلق هي

د(هـ ، و) = (س(جاهـ) ، ص(جاو)) ← (٢٠٤)

قاعدة (١٠٤):-

أبسط صورة بيانية لتمثيل أي سطح مغلق تعطى بالصيغة التالية:

د(هـ ،و) = (أ جاهـ + ب ، جـ جاو + د) ← (٣٠٤)

حيث أ ، ب ، جـ وهي إعداد حقيقية ٠

قاعدة (٢٠٤) :-

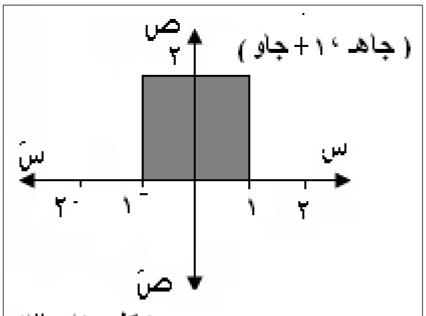
لرسم سطح مغلق على محور الإحداثيات يكفي أن نوجد نقاط أركان السطح المغلق ثم نصل بين تلك النقاط لتحديد محيط الشكل المغلق وبهذا تكون مجموعة النقاط المتواجد في أطار محيط الشكل المغلق هي نقاط بيانية ضمن السطح المغلق,

مثال (٢٠٤) :- أرسم البيانية د(هـ ،و) = (جاهـ ، ١ + جاو)

الحل:-

هـ	و	س	ص	(س،ص)
٩٠	٩٠	١	٢	(١،٢)
٩٠	٩٠-	١	٠	(١،٠)
٩٠-	٩٠	١-	٢	(١-،٢)
٩٠-	٩٠-	١-	٠	(١-،٠)

جدول (٢٠٤)



شكل (٣٠٤)

قاعدة (٣٠٤) :-
لإيجاد بيانية سطح مغلق د(هـ ، و) = (أ جاهـ + ب ، جـ جاهـ + د)٠
نضع (أ+ب) يساوي أكبر قيمة من س تقع في أحدى أركان السطح ، (- أ +ب) يساوي أصغر قيمة من س تقع في أحدى أركان السطح ، وكذالك نضع (جـ +د) يساوي أكبر قيمة من ص تقع على أحدى أركان السطح ، (- جـ +د) يساوي أصغر قيمة من ص موجودة في أحدى أركان السطح ٠ثم نحل كل معادلتين على حدي ليجاد قيم أ ، ب ، جـ ، د

مثال (٣٠٤) :- أوجد بيانية السطح المغلق والواقع أركانه على النقاط الإحداثيات وهي (-١،٢) ،(-٢،٣) ،(٤،١) ،(٤،٣) ؟
الحل :-
نضع أ + ب=٤ ، -أ + ب=-٢ ⇐ أ =٣ ،ب =١
نضع جـ + د =٣ ، -جـ + د =١ ⇐ جـ =١ ،د =٢
∴ بيانية السطح د(هـ) = (٣جاهـ +١ ، جاو +٢)

٢٠٣٠٤ السطح شبه المفتوح (أو شبه المفتوح)

السطح شبه المفتوح هو السطح الذي يكون مفتوح من جانبين ومغلق في الجانبين الآخرين٠
والصورة البيانية العامة لسطح شبه مفتوح هي
١) د(هـ ، و) = (س(هـ) ، ص(جاو)) عندما يكون السطح مفتوح عبر المحور السيني
٢) د(هـ ،و) = (س(جاهـ) ، ص(و)) عندما يكون السطح مفتوح عبر المحور الصادي

قاعدة (٢٠٤) :-
أبسط صورة بيانية لتمثيل سطح شبة مفتوح تعطى بأحدي الصورتين :
١) عندما يكون السطح المفتوح خلال المحور السيني ومغلق على المحور الصادي
د(هـ ،و) = (هـ ، أ جا و + ب) ← (٦٠٤)
٢) عندما يكون السطح مفتوح خلال المحور الصادي ومغلق على المحور السيني
د(هـ ،و) = (أ جا هـ + ب، و) ← (٧٠٤)

وهنا سوف نورد بعض الأمثلة على ذلك
١) د(هـ ،و) = (هـ ، جا و)
٢) د(هـ ،و) = (هـ ،٢ جا و +٣)
٣) د(هـ ،و) = (٢جاهـ ، و)
٤) د(هـ ،و) = (٣حاهـ +٧ ، و)
٥) د(هـ ،و) = (جاهـ ، ٢و) ٠٠٠٠٠٠ الخ

٣٠٣٠٣ السطح المفتوح

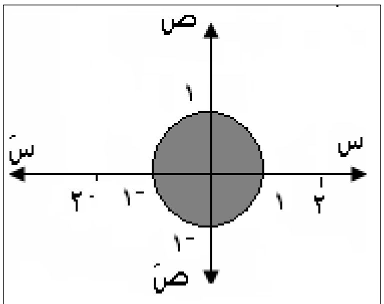
السطح المفتوح هو السطح الذي يكون مفتوح في جميع الاتجاهات والصورة البيانية العامة لسطوح المفتوحة هي :

| د(هـ،و) = (س(هـ) ، ص (و)) | ← (٨٠٤)

قاعدة (٣٠٤):-
السطح الشامل هو السطح الذي يحوي جميع نقاط الإحداثيات (س ، ص) وصورته البيانية في أبسط صورة هي د(هـ ،و) = (هـ ،و) ٠ فأي نقطة على محور الإحداثيات هي نقطة بيانية من البيانية د(هـ ،و) = (هـ ، و) أو السطح الشامل

٤٠٤ السطح الدائري

السطح الدائري هو السطح الناتج عن دوران عدد مركب ٠ فلو نظرنا إلي الشكل (٤٠٤) والذي يمثل مساحة دائرة نصف قطرها ١، نجد أن سطح الدائرة تولد عن دوران العدد المركب ع=١ و بزاوية مقدارها هـ ٠ ولتوضيح أكثر شاهد الجدول (٣٠٤) أسفل والذي يبين لنا كيف أن السطح نشأ من دوران العدد المركب ع=١ أو ع=(١،٠) ٠



شكل (٤٠٤)

ل العدد المركب |ر|	الزاوية (هـ)	(|ر| ، هـ)
١	٠°	(١،٠°)
١	١°	(١،١°)
١	٢°	(١،٢°)
١	٣°	(١،٣°)
١	٤°	(١،٤°)
١	٥°	(١،٥°)
⋮	⋮	⋮
١	٣٠°	(١،٣٠°)
⋮	⋮	⋮
١	٩٠°	(١،٩٠°)
⋮	⋮	⋮
١	١٨٠°	(١،١٨٠°)
⋮	⋮	⋮
١	٣٦٠°	(١،٣٦٠°)
⋮	⋮	⋮

جدول (٣٠٤)

من الجدول (٣٠٤) السابق نجد أن الأعداد المركبة (١،١) ، (١،٢) ،(١،٣) ٠٠٠ (١،٣٠) ،(١،٣١) ٠٠٠(١،٩٠)،(١،٩١) ٠٠٠ الخ نتجت أساسا من دوران العدد المركب (١،٠) ، وفي النهاية هذه الأعداد شكلت مساحة سطح دائرة نصف قطرها الواحد ٠ أذن نستنتج مما سبق أن الصورة البيانية (|ر| ،هـ) هي الصورة البيانية لسطح الدائري وتسمى الصورة البيانية المركبة ٠

قاعدة (٤٠٤) :-
الصورة البيانية لسطح دائري تعطى بالصيغة التالية:
د(هـ) = (ر(هـ) ، ز(هـ)) ← (٩٠٤)
حيث
ر(هـ) يمثل طول العدد المركب والذي يتغير بتغير المتغير هـ ،
ز(هـ) يمثل زاوية العدد المركب والذي أيضا يتغير بتغير المتغير هـ ،
هـ متغير يتحكم بقيم كل من طول و زاوية العددالمركب٠

قاعدة (٥٠٤) :-
الصورة البيانية لعدد مركب هي
د(هـ) = (|أ| ، ب) ← (٤ ١٠٠)
حيث أ عدد ثابت يمثل طول عدد مركب ،
ب عدد ثابت يمثل زاوية عدد مركب ٠
مثال: د(هـ)= (٢،°٤٥)

قاعدة (٦٠٤) :-
الصورة البيانية لسطح دائرة مركزها (٠،٠) هي
د(هـ) = (أ ، هـ°) ← (١١٠٤)
حيث أ عدد حقيقي موجب ثابت ، أ=نق
، هـ متغير يمثل زاوية العدد المركب ٠

ملاحظة :
هناك تشابه بين الصورة البيانية د(هـ) =(س ، ص) و الصورة البيانية د(هـ) =(ر ، ز) والتي تسمى الصورة البيانية المركبة من حيث الشكل وتختلفا من حيث المضمون ،ولكي نفرق بينهما نضع دائرة صغيرة فوق حرف الدال بالنسبة للصورة البيانية المركبة ٠
لذا سوف تكون الصيغة البيانية المركبة بالصورة التالية :
د° (هـ) = (ر(هـ) ، ز(هـ))

و فما يلي سوف نورد بعض الأمثلة على الصورة البيانية المركبة:

١) د° (هـ) = (١ ، ٣٠ حاهـ)

٢) د° (هـ) = (٢ ، هـ)

٣) د° (هـ) = (هـ ،٤٥) وهذه تكافئ البيانية د(هـ) =(هـ ، هـ)

٤) د° (هـ) = (جاهـ ، هـ) وغيرها من الأمثلة المعقدة

مثال (٤٠٤) :- أرسم فما بلي بيانياً ؟

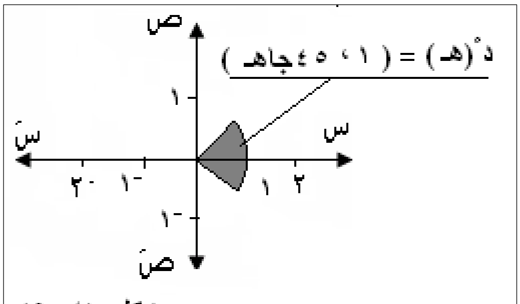
١) د° (هـ)=(١ ، ٤٥ جاهـ) ، ٢) د° (هـ)= (١،٤٥)

الحل:

١) د° (هـ)=(١ ، ٤٥ جاهـ)

هـ	ر(هـ)=١	ز(هـ)=٤٥جاهـ	(ر،ز)
٩٠	١	٤٥	(١،٤٥)
⋮	⋮	⋮	⋮
٣٠	١	٢٢٫٥	(١،٢٢٫٥)
⋮	⋮	⋮	⋮
٤٥	١	٣٢	(١،٣٢)
⋮	⋮	⋮	⋮
ـ٤٥	١	ـ٣٢	(١،ـ٣٢)
⋮	⋮	⋮	⋮
ـ٩٠	١	ـ٤٥	(١،ـ٤٥)

جدول (٤٠٤)

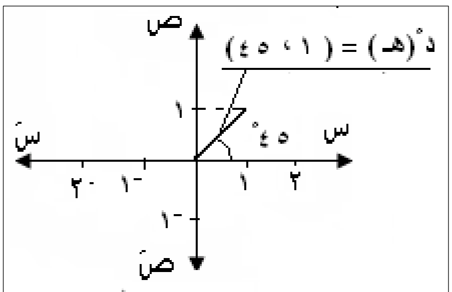


شكل (٥٠٤)

٣) د° (هـ)= (١،٤٥)

هـ	ر(هـ)	ز(هـ)	(ر،ز)
صفر	١	٤٥	(١،٤٥)
⋮	⋮	⋮	⋮
٣٠	١	٤٥	(١،٤٥)
⋮	⋮	⋮	⋮
٤٥	١	٤٥	(١،٤٥)
⋮	⋮	⋮	⋮
٩٠	١	٤٥	(١،٤٥)
⋮	⋮	⋮	⋮
١٨٠	١	٤٥	(١،٤٥)
⋮	⋮	⋮	⋮

جدول (٥٠٤)



شكل (٦٠٤)

مثال (٥٠٤) : - أكتب الصورة البيانية لكل ما يلي؟
١) سطح دائرة نصف قطرها يساوي ٧ ومركزها (٠،٠)
٢) العدد المركب ع = ١ + ت
٣) نصف سطح دائرة واقع فوق المحور السيني حيث نق = ٢ ومركزه (٠،٠)
الحل:
١) الصورة البيانية لسطح دائرة مركزها (٠،٠) ونصف قطرها ٧ هي
د° (هـ) = (٧ ، هـ)

٢) ع = ١ + ت
١ + ت = $\sqrt{2}$ ($\frac{1}{\sqrt{2}}$ ، $\frac{1}{\sqrt{2}}$) = ($\sqrt{2}$ ، ٤٥)
د° (هـ) = ($\sqrt{2}$ ، ٤٥)

٣) الصورة البيانية لنصف سطح دائرة واقع فوق المحور السيني ومركزه (٠،٠) ونصف قطره ٢ هي
د° (هـ) = (٢ ، $\frac{\pi}{2}$ جاهـ + $\frac{\pi}{2}$)
فعندما هـ = $\frac{\pi}{2}$ ⇐ د° ($\frac{\pi}{2}$) = (٢، π) وهذا يمثل أبعد عدد مركب يطابق المحور السيني السالب
وعندما هـ = $\frac{-\pi}{2}$ ⇐ د° ($\frac{-\pi}{2}$) = (٢،صفر) وهذا يمثل عدد مركب طوله ٢ وزاويته صفر درجة ويعتبر أبعد عدد مركب في الطرف الأخر ٠

الفصل الخامس :

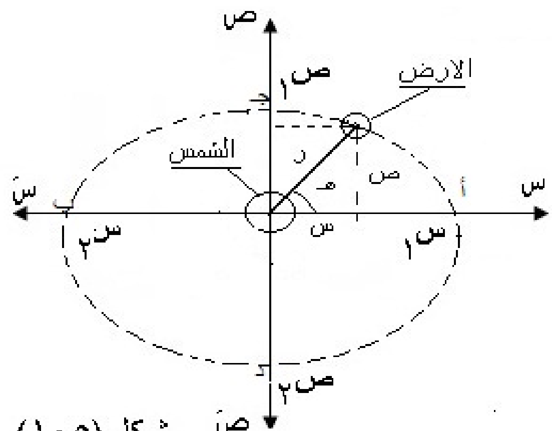
بيانية مدار الأرض و القمر

١٠٥ المقدمة

المجموعة الشمسية هي كل ما يقع في حقل جاذبية الشمس و يدور حولها من كواكب و كويكبات و أقمار و شهب. ففي هذا الفصل سوف نحاول إيجاد الصيغة البيانية للمدار ذالك الخط الوهمي الذي يتحرك فيه الجسم حول جسم آخر. و لكننا في هذا الفصل سنكتفي فقط بإيجاد الصورة البيانية للمدار الأرض و كذالك مدار القمر. فالصورة البيانية لمدار جسم يدور حول الشمس تعطى بالصورة البيانية التالية:

د(هـ)=($\frac{1}{2}$ [(أ+ب)جتاهـ +(أ-ب)(١- |جاهـ|)]، $\frac{1}{2}$ [(جـ+د) جاهـ +(جـ - د)(١- |جتاهـ|)])

حيث أ ، ب ، جـ ، د ثوابت ، هـ = ωز



شكل(١٠٥)

فلو نظرنا إلى الشكل(١.٥) أعلي و الذي يمثل مدار الأرض حول الشمس. حيث

م مركز الشمس يمثل مركز محور الإحداثيات (٠،٠)،

ر يمثل المسافة بين مركز الشمس و مركز الأرض ،

هـ تمثل الزاوية المحصورة بين المحور السيني و المستقيم (ر)، هـ= ωز

و من الشكل أعلى نجد أن

س= ر جتاهـ ، ص= ر جاهـ

د(هـ)=(س،ص) ⟵ الصورة البيانية العامة

د(هـ)=(ر جتاهـ ، ر جاهـ) عندما $س_١ = س_٢$

و كما هو معروف لدينا بأن المسافة بين الشمس و الأرض تختلف من يوم إلى أخر علي مدار السنة. إي أن الصورة البيانية لمدار جسم يدور حول الشمس تعطي كما يلي:

د(هـ)=($\frac{1}{2}$[($س_١$ + $س_٢$)جتاهـ -($س_١$ - $س_٢$) (١- |جاهـ|)]، ص جاهـ)

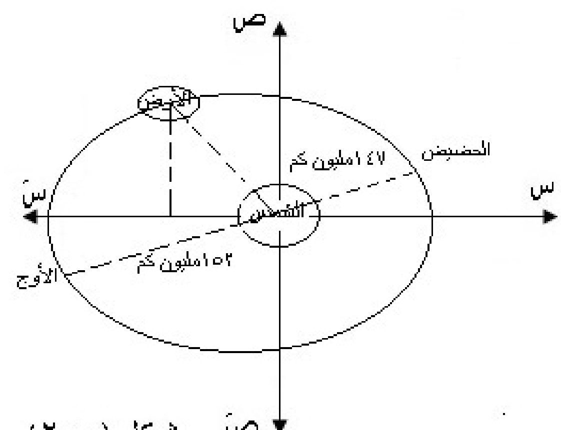
حيث:

س= $س_١$ عندما هـ=٠°

س= $س_٢$ عندما هـ =١٨٠°

٢٠٥ بيانيـة مدار الأرض حول الشمس

تدور الأرض حول الشمس دورة كاملة في السنة إي ٣٦٥.٢٥ يوم و يتميز مدار الأرض بالشكل البيضاوي، لذلك تختلف المسافة بين الشمس و الأرض من يوم إلى أخر علي مدار السنة. أنظر الشكل(٢.٥) أسفل و الذي يمثل مدار الأرض حول الشمس، و يبلغ معدل المسافة بين الشمس و الأرض حوالي ١٥٠ مليون كم. و تكون الأرض أبعد ما يكون عن الشمس (الأوج) بحوالي ١٥٢.٥ مليون كم بينما تكون أقرب مسافة(الحضيض) بحوالي ١٤٧.٥ مليون كم.



شكل(٢٠٥)

مما سبق نستنتج التالي:

أ) أقرب مسافة بين الأرض والشمس= $١٤٧,٥\times ١٠^{٩}$ م

∵أقرب مسافة للأرض تكون في يوم ٣ يناير من السنة (الحضيض)

∴ $س_{١} = ١٤٧,٥\times١٠^{٩}$ جتا($٣\times\frac{٢\pi}{٣٦٥,٢٥}$)$= ١٤٧,٥\times١٠^{٩}$جتا $٠,٠٥ = ١٤٧,٣\times١٠^{٩}$م

ب) أبعد مسافة بين الأرض و الشمس = $٢٥٢,٥\times١٠^{٩}$ م

∵ أبعد مسافة للأرض تكون في يوم ٤ يوليو من السنة (الأوج)

∴ $س_{٢} = ٢٥٢,٥\times١٠^{٩}$ جتا($٣\times\frac{٢\pi}{٣٦٥,٢٥}$)$= ٢٥٢,٥\times١٠^{٩}$جتا $٠,٠٥ = ١٥٢,٣\times١٠^{٩}$م

س= $\frac{١}{٢}$[($س_{١}+س_{٢}$)جتاهـ -($س_{١}-س_{٢}$)+($س_{١}-س_{٢}$) |جاهـ|]

س= $\frac{١}{٢}$[($س_{١}+س_{٢}$)جتاهـ -($س_{١}-س_{٢}$) (١- |جاهـ|)]

= $\frac{١}{٢}$[($١٤٧,٣\times١٠^{٩}+١٥٢,٣\times١٠^{٩}$)جتا(هـ)+($١٤٧,٣\times١٠^{٩}-١٥٢,٣\times١٠^{٩}$)(١- |جاهـ|)]]

س= $١٤٩,٨\times١٠^{٩}$ جتا(هـ)- $٢,٥\times١٠^{٩}$ (١- |جاهـ|)

س= $١٤٩,٨\times١٠^{٩}$ جتا(هـ -٠,٠٥)- $٢,٥\times١٠^{٩}$ (١- |جاهـ -٠,٠٥|)

ص= ١٥٠×١٠^{٩} جاهـ

د(هـ)=(س ، ص)

د(هـ)=(١٤٩,٨×١٠^{٩} جتا(هـ)- ٢,٥×١٠^{٩} (١- |جاهـ|) ، ١٥٠×١٠^{٩} جاهـ)

د(هـ - ٠,٠٥)= (١٤٩,٨×١٠^{٩} جتا(هـ -٠,٠٥)- ٢,٥×١٠^{٩} (١- |جا(هـ-٠,٠٥)|) ، ١٥٠×١٠^{٩} جا(هـ -٠,٠٥))

د(هـ)= (١٤٩,٨×١٠^{٩} جتا(هـ -٠,٠٥)- ٢,٥×١٠^{٩} (١- |جا(هـ -٠,٠٥)|) ، ١٥٠×١٠^{٩} جا(هـ -٠,٠٥))

فعندما هـ= ٠ $\Leftarrow$ د(٠)=(١٤٧,٤٤×١٠^{٩}، -٧,٥×١٠^{٩})

و عندما هـ= ١٨٠ $\Leftarrow$ د(١٨٠)=(– ١٥٢,٢٢×١٠^{٩}، ٧,٥×١٠^{٩})

و عندما هـ=٩٠ $\Leftarrow$ د(٩٠)=(١٥×١٠^{٩}، ١٤٩,٢٥×١٠^{٩})

س$_{١}$ =١٤٧,٤٤×١٠^{٩} . س$_{٢}$ =١٥٢,٢٢×١٠^{٩} ، **ص=** ١٤٩,٢٥×١٠^{٩}

$\frac{١}{٢}$ (س$_{١}$ + س$_{٢}$)=١٤٩,٨٢×١٠^{٩} ، $\frac{١}{٢}$ (س$_{١}$ - س$_{٢}$)=-٢,٣٨×١٠^{٩}

∴ بيانية مدار الأرض تشابه البيانية التالية:

د(هـ)= (١٤٩,٨٢×١٠^{٩} جتاهـ - ٢,٣٨×١٠^{٩} (١- |جاهـ|) ، ١٤٩,٢٥×١٠^{٩} جاهـ)

مثال(١٠٥): أحسب المسافة بين الأرض و الشمس عند التاريخ التالي:

أ) ١٥ مارس ٢٠١٣م ب)١٥ مارس ٢٠١٢م جـ) ٥ مايو ٢٠١٤م

الحل:

أ) ١٥ مارس ٢٠١٣م

أولاً : نحسب الزاوية عند هذا التاريخ

هـ= ω ز= $\frac{٢\pi}{٣٦٥}$ × ٧٣=١.٢٦

ثانياً: نعوض عن قيمة هـ وفق البيانية التالية:

د(هـ)= (١٤٩,٨٢×١٠^{٩} جتاهـ ٢,٣٨×١٠^{٩} (١- |جاهـ|) ، ١٤٩,٢٥×١٠^{٩} جاهـ)

د(١,٢٦)=(١٤٩,٨٢×١٠^{٩} جتا١,٢٦- ٢,٣٨×١٠^{٩} (١- |جا١,٢٦|) ، ١٤٩,٢٥×١٠^{٩} جا١,٢٦)

د(١,٢٦)=(٤٥,٧×١٠^{٩} ، ١٤٢,١ ×١٠^{٩})

ثالثاً: نحسب المسافة و ذالك حسب القانون

ف^{٢} =س^{٢} + ص^{٢} حيث

س=٤٥,٧×١٠^{٩} ، ص=١٤٢,١×١٠^{٩}

ف^{٢} = (٤٥,٧ ×١٠^{٩})^{٢} +(١٤٢,١×١٠^{٩})^{٢}

ف^{٢} = ٢٢٢٨١,١×١٠^{١٨}

ف=١٤٩,٢٧×١٠^{٩}م $\cong$ ١٤٩,٣ مليون كم

ب) ١٥ مارس ٢٠١٢م

هـ = ωز= $\frac{\pi ٢}{٣٦٦}$ × **٧٤ =١,٢٧**

د(هـ)= **(** ١٤٩,٨٢×١٠ ^٩^ **جتاهـ** ٢,٣٨×١٠ ^٩^ **(١- إجاهـإ)** ، ١٤٩,٢٥×١٠ ^٩^ **جاهـ)**

د(١,٢٧)=(١٤٩,٨٢×١٠ ^٩^ **جتا١,٢٧** -٢,٣٨×١٠ ^٩^ **(١- إجا١,٢٧إ)** ، ١٤٩,٢٥×١٠ ^٩^ **جا١,٢٧)**

د(١,٢٧)= (٤٤,٢٨×١٠ ^٩^ ، ١٤٢,٥٥ ×١٠ ^٩^)

س= ٤٤,٢٨ ×١٠ ^٩^، ص=١٤٢,٥٥×١٠ ^٩^

ف ^٢^ =س ^٢^ + ص ^٢^

ف ^٢^ =(٤٤,٢٨ ×١٠ ^٩^) + (١٤٢,٥٥×١٠ ^٩^) ^٢^

ف ^٢^ =٢٢٢٨١,١×١٠ ^١٨^

ف=١٤٩,٢٧ ×١٠ ^٩^ م ≅ ١٤٩,٣مليون كم

جـ) ٥ مايو ٢٠١٤م

هـ = ωز= $\frac{\pi ٢}{٣٦٥}$ × **١٢٥ =٢,١٥**

د(هـ)= **(** ١٤٩,٨٢×١٠ ^٩^ **جتاهـ** ٢,٣٨×١٠ ^٩^ **(١- إجاهـإ)** ، ١٤٩,٢٥×١٠ ^٩^ **جاهـ)**

د(٢,١٥)=(١٤٩,٨٢×١٠ ^٩^ **جتا٢,١٥** -٢,٣٨×١٠ ^٩^ **(١- إجا٢,٢٥إ)** ، ١٤٩,٢٥×١٠ ^٩^ **جا٢,١٥)**

د(٢,١٥)= (-٨٢,٤×١٠ ^٩^ ، ١٢٤,٩١ ×١٠ ^٩^)

س= -٨٢,٤ ×١٠ ^٩^، ص=١٢٤,٩١×١٠ ^٩^

س= -٨٢,٤×١٠ ^٩^ ، ص=١٢٤,٩١×١٠ ^٩^

ف ^٢^ =س ^٢^ + ص ^٢^

ف ^٢^ =(-٨٢,٤×١٠ ^٩^) ^٢^ + (١٢٤,٩١×١٠ ^٩^) ^٢^

ف ^٢^ =٢٢٣٩٠,٥×١٠ ^١٨^

ف=١٤٩,٦٣٤ ×١٠ ^٩^ م ≅ ١٤٩,٦مليون كم

٣٠٥ بيانية مدار القمر

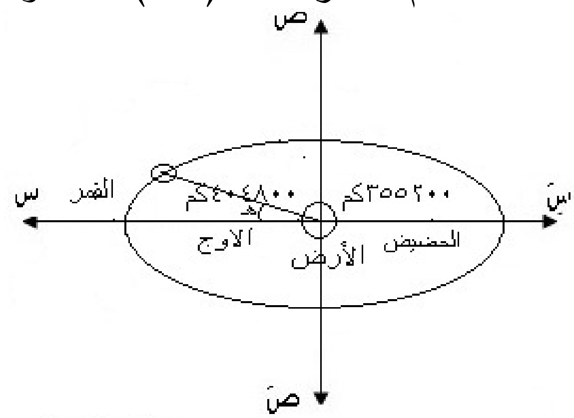
دورة القمر حول الأرض تنقسم إلى نوعين

أ) دورة القمر حول الأرض

ب) دورة القمر حول الشمس : حيث يدور القمر مع الأرض أثناء دورانها حول الشمس٠

١٠٣٠٥ بيانية مدار القمر حول الأرض

يبلغ معدل المسافة بين القمر و الأرض حوالي ٣٨٤,٤٦٧ كم٠ و يكون القمر أبعد ما يكون عن الأرض (الأوج) بحوالي ٤٠٤٨٠٠ كم بينما يكون أقرب مسافة(الحضيض) بحوالي ٣٥٥٢٠٠ كم٠ أنظر الشكل(٣.٥) أسفل و الذي يمثل مدار القمر حول الأرض٠



شكل(٣٠٥)

د(هـ)=($\frac{١}{٢}$[($س_{١}$+$س_{٢}$)جتاهـ-($س_{١}$-$س_{٢}$) (١- |جاهـ|)] ، $ص_{١}$ جاهـ)

حيث

$س_{١}$=٤٠٤٨٠٠ ×$١٠^{٣}$م، $س_{٢}$=٣٥٥٢٠٠ ×$١٠^{٣}$م ، $ص_{١}$=٣٨٠٠٠٠×$١٠^{٣}$م

د(هـ)= (٣٨٠٠٠٠×$١٠^{٣}$ جتاهـ +٢٤٨٠٠٠٠(١- |جاهـ|)، ٣٨٠٠٠٠×$١٠^{٣}$جاهـ)

∴ **بيانية مدار الأرض حول الأرض تشابه البيانية التالية:**

د(هـ)= (٣٨٠٠٠٠×$١٠^{٣}$ جتاهـ +٢٤٨٠٠٠٠(١- |جاهـ|)، ٣٨٠٠٠٠×$١٠^{٣}$جاهـ)

د(هـ)= (٣٨٠٠٠٠×$١٠^{٣}$ جتاهـ +٢٤٨٠٠٠٠(١- |جاهـ|)، ٣٨٠٠٠٠×$١٠^{٣}$جاهـ)

د(هـ)= (٣٨٠٠٠٠×$١٠^{٣}$ جتاهـ +٢٤٨٠٠٠٠(١- |جاهـ|)، ٣٨٠٠٠٠×$١٠^{٣}$جاهـ)

مثال(٢.٥): أحسب المسافة بين القمر و الأرض عند الزاوية 30° و كذالك عدد الأيام عند نقس هذه الزاوية.
الحل:هـ =٣٠°

∴ د(هـ)= (٣٨٠٠٠٠×١٠^{٣} جتاهـ +٢٤٨٠٠٠٠٠٠(١- |جاهـ|)، ٣٨٠٠٠٠×١٠^{٣}جاهـ)

∴ د(٣٠)= (٣٨٠٠٠٠×١٠^{٣} جتا٣٠ +٢٤٨٠٠٠٠٠٠(١- |جا٣٠|)،- ٣٨٠٠٠٠×١٠^{٣}جا٣٠)

د(٣٠)=(٣٨٠٠٠٠ ×١٠^{٣} × $\sqrt{\frac{٣}{٢}}$ +٢٤٨٠٠٠٠٠٠× $\frac{١}{٢}$،- ٣٨٠٠٠٠×١٠^{٣} × $\frac{١}{٢}$)

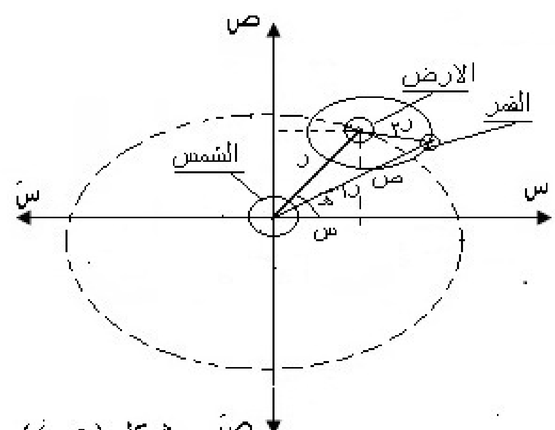
د(٣٠)=(٣٤,١٥ ×١٠^{٧}،- ١٩×١٠^{٧})

ف^{٢} =(٣٤,١٥ ×١٠^{٧})^{٢} + (-١٩ ×١٠^{٧})^{٢}

ف=٣٩٠٧٨٧٩٠١ م =٣٩,١٠ ×١٠^{٧}م

هـ= ωز ⇔ ٣٠ = $\frac{٣٦٠}{٢٩.٥}$ ز ⇔ ٣٦٠ ز =٨٨٥ ⇔ ز=٢,٤٦ يوم≈ ٢,٥ يوم

٢٠٣٠٥ بيانية مدار القمر بالنسبة للشمس



شكل(٤٠٥)

أنظر الشكل (٤٠٥)أعلى والذي يوضح مدار القمر بالنسبة للشمس و الناتج من مدار الأرض حول الشمس و مدار القمر حول الأرض. أي أن بيانية مدار القمر بالنسبة للشمس تعطى بالصورة البيانية التالية:

د(هـ$_{١}$)=(ر جتاهـ$_{١}$ ، رجاهـ$_{١}$) حيث
ر : يمثل المسافة بين الشمس و القمر

هـ$_{١}$: تمثل الزاوية المحصورة بين س=٠ و المستقيم الواصل بين مركز الشمس و مركز القمر
∵ بيانية مدار القمر بالنسبة للشمس=بيانية مدار الأرض للشمس + بيانية مدار القمر للأرض

د(هـ$_{١}$)=(ر جتاهـ$_{١}$ ، رجاهـ$_{١}$) =(س$_{١}$ جتاهـ$_{٢}$، ص$_{١}$جاهـ)+(س$_{٢}$ جتاهـ$_{٢}$ ، -ص$_{٢}$ جاهـ$_{٢}$)
∵ القمر يدور حول الأرض من الغرب إلى الشرق عكس دورن الأرض حول الشمس

∴(ر جتاهـ$_{١}$ ، رجاهـ$_{١}$) = (س$_{١}$ جتاهـ + س$_{٢}$ جتاهـ$_{٢}$، ص$_{١}$جاهـ - ص$_{٢}$ جاهـ$_{٢}$)

حيث:

هـ: تمثل الزاوية المحصورة بين س=٠ و المستقيم الواصل بين مركز الشمس و مركز الأرض٠

هـ$_{٢}$= تمثل الزاوية المحصورة بين س=٠ و المستقيم الواصل بين مركز الأرض و مركز القمر٠

د(هـ)= (١٤٩,٨٢ ×١٠^{٩} جتاهـ ٢,٣٨ ×١٠^{٩} (١- |جاهـ|) ، ١٤٩,٢٥ ×١٠^{٩} جاهـ)

+(٣٨٠٠٠٠ ×١٠^{٣} جتاهـ$_{٢}$ +٢٤٨٠٠٠٠٠ (١- |جاهـ$_{٢}$|)،- ٣٨٠٠٠٠ ×١٠^{٣}جاهـ$_{٢}$)

=١٤٩,٨٢ ×١٠^{٩} جتاهـ - ٢,٣٨ ×١٠^{٩} (١- |جاهـ|) +٣٨٠٠٠٠ ×١٠^{٣} جتاهـ$_{٢}$ +

٢٤٨٠٠٠٠٠ (١- |جاهـ$_{٢}$|)، ١٤٩,٢٥ ×١٠^{٩} جاهـ - ٣٨٠٠٠٠ ×١٠^{٣}جاهـ$_{٢}$)

هـ$_{٢}$ = ١٢,٤ هـ

د(هـ) =١٤٩,٨٢ ×١٠^{٩} جتاهـ ٢,٣٨ ×١٠^{٩} (١- |جاهـ|)+

٣٨٠٠٠٠ ×١٠^{٣} جتا١٢,٤هـ +٢٤٨٠٠٠٠٠ (١- |جا١٢,٤هـ|)، ١٤٩,٢٥ ×١٠^{٩} جاهـ

-٣٨٠٠٠٠ ×١٠^{٣}جا١٢.٤هـ)

∴ بيانية القمر بالنسبة للشمس هي كالتالي

د(هـ) =(١٤٩,٨٢ ×١٠^{٩} جتاهـ - ٢,٣٨ ×١٠^{٩} (١- |جاهـ|)+٣٨٠٠٠٠ ×١٠^{٣} جتا١٢,٤هـ + ٢٤٨٠٠٠٠٠ (١- |جا١٢,٤هـ|) ، ١٤٩,٢٥ ×١٠^{٩} جاهـ - ٣٨٠٠٠٠ ×١٠^{٣}جا١٢,٤هـ)

مثال(٣.٥): أذا علمت أن تاريخ اليوم هو ١ يوليو ٢٠١٤ ، أحسب ما يلي:

أ) المسافة بين الشمس و الأرض
ب) المسافة بين الأرض و القمر
ج) المسافة بين القمر و الشمس
د) التاريخ الهجري، علماً بان تاريخ ١ يناير ٢٠١٤م يقابله ٢٩ صفر ١٤٣٥هـ

الحل:

أ) المسافة بين الشمس و الأرض

هـ= ω ز= $\frac{٢\pi}{٣٦٥}$ × ١٨٢ = ٣,١٣

نعوض عن قيمة هـ وفق بيانية مدار الأرض حول الشمس التالية:

د(هـ)= (١٤٩,٨٢ ×١٠^{٩} جتاهـ ٢,٣٨ ×١٠^{٩} (١- |جاهـ|) ، ١٤٩,٢٥ ×١٠^{٩} جاهـ)

د(٣,١٣)=(١٤٩,٨٢ ×١٠^{٩} جتا٣,١٣- ٢,٣٨ ×١٠^{٩} (١- |جا٣,١٣|) ، ١٤٩,٢٥ ×١٠^{٩} جا٣,١٣)

د(٣,١٣)=(- ١٥٢,١٦ ×١٠^{٩}، ١,٧٣ ×١٠^{٩})

ف ^{٢} =(-١٥٢,١٦×١٠^{٩}) ^{٢} +(١,٧٣×١٠^{٩}) ^{٢}

$\boxed{\text{ف=١٥٢,١٧ × ١٠}^{٩}\text{ م}}$

ب) المسافة بين الأرض و القمر

هـ=١٢,٣٧ × ٣,١٣ =٣٨,٧

نعوض عن قيمة هـ وفق بيانية مدار القمر حول الأرض التالية:

د(هـ)= (٣٨٠٠٠٠×١٠^{٣} جتاهـ +٢٤٨٠٠٠٠٠(١- |جاهـ|)،٣٨٠٠٠٠×١٠^{٣} جاهـ)

د(٣٨,٧)= (٣٨٠٠٠٠×١٠^{٣} جتا(٣٨,٧) +٢٤٨٠٠٠٠٠(١- |جا(٣٨,٧)|)، ٣٨٠٠٠٠×١٠^{٣} جا(٣٨,٧))

د(٣٨,٧)=(٠,٢١×١٠^{٩}،-٠,٣×١٠^{٩})

ف ^{٢} =(٠,٢١×١٠^{٩}) ^{٢} + (٠,٣٣×١٠^{٩}) ^{٢}

ف=٣٨٩٢٠٥,٦٤ ×١٠^{٣}م= ٠,٣٩ ×١٠^{٩}م

$\boxed{\text{ف=٠,٣٩×١٠}^{٩}\text{م}}$

ظاهـ = $\frac{\text{ص}}{\text{س}}$ = $\frac{\text{,٣٣×١٠}^{٩}}{\text{,٢١×١٠}^{٩}}$ = $\frac{\text{,٣٣}}{\text{,٢١}}$=-١,٥٧

ظاهـ =١,٥٧ ⇐ هـ = ١,٠٠٤ =١

١= $\frac{٢\pi}{٢٩.٥}$ ز

٢π ز = ١ × ٢٩,٥=-٢٩,٥

ز=٤,٧ ≅ ٥ أيام

ج) المسافة بين القمر و الشمس

بيانية مدار القمر للشمس = بيانية مدار الأرض للشمس+بيانية مدار القمر للأرض

د(٣,١٣)=(- ١٥٢,١٦×١٠^{٩}،١,٧×١٠^{٩})+(٠,٢١×١٠^{٩}، -٠,٣٣ ×١٠^{٩})

د(٣,١٣)=(- ١٥١,٩٥×١٠^{٩}،١,٣٧×١٠^{٩})

ف ^{٢} =(- ١٥١,٩٥ ×١٠^{٩}) ^{٢} + (١,٣٧×١٠^{٩}) ^{٢}

$\boxed{\text{ف=١٥١,٩٦×١٠}^{٩}\text{ م}}$

د) التاريخ الهجري، علماً بان تاريخ ١ يناير ٢٠١٤م يقابله ٢٩ صفر ١٤٣٥هـ

د(٣,١٣)=(- ١٥١,٩٦ ×١٠^{٩}،١,٣٧×١٠^{٩})

س=-١٥١,٩٦×١٠^{٩} ، ص=١,٣٧×١٠^{٩}

ظاهـ = $\frac{\text{ص}}{\text{س}}$ = $\frac{\text{١,٣٧×١٠}^{٩}}{\text{-١٥١,٩٦×١٠}^{٩}}$ = - $\frac{\text{١,٣٧}}{\text{١٥١,٩٦}}$=-٠,٠٠٩

ظاهـ = -٠,٠٩ ⇐ هـ = -٠,٠٩ =٣,٠٨=٣,١٣

د(٣,١٣)= (- ١٥١,٩٦×١٠^{٩}، ١,٣٧×١٠^{٩})

هـ = ω ز

٣,١٣ = $\frac{٢\pi}{٣٥٤}$ ز

٢π ز =٣,١٣ × ٣٥٤=١١٠٩

٢π ز = ١١٠٩ ⇐ ز = ١٧٧ يوم = $\frac{١٧٧}{٢٧}$ = ٦,٦ شهر ≈ ٧ أشهر

التاريخ الهجري الذي يقابل التاريخ الميلادي ١ يوليو ٢٠١٤م يقابله كالتالي:

اليوم = ٦

الشهر= ٧ + ٢ =٩ (٢= محرم+ صفر)

التاريخ الهجري ≅ ٥ رمضان ١٤٣٥هـ

مثال(٤.٥): احسب التاريخ الهجري المقابل لتاريخ الميلادي ٢٣ يناير ٢٠١٤م ،مع التوضيح بالرسم.، علماً بان ٢ يناير ٢٠١٤م يوافق ١ ربيع الأول ١٤٣٥هـ .

الحل

أولاً: نحسب المسافة بين الشمس و الأرض

هـ= ω ز= $\frac{٢\pi}{٣٦٥}$ × ٢٣ = ٠,٣٩٦ =٠,٤

نعوض عن قيمة هـ وفق بيانية مدار الأرض حول الشمس التالية:

د(هـ)= (١٤٩,٨٢×١٠^{٩} جتاهـ ٢,٣٨×١٠^{٩} (١- |جاهـ|) ، ١٤٩,٢٥×١٠^{٩} جاهـ)

د(٠,٤)=(١٤٩,٨٢×١٠^{٩} جتا٠,٤- ٢,٣٨×١٠^{٩} (١- |جا٠,٤|) ، ١٤٩,٢٥×١٠^{٩} جا٠,٤)

د(٣,١٣)=(١٣٦,٥٤×١٠^{٩}، ٥٨,١٢×١٠^{٩})

ف^{٢} =(١٣٦,٥٤×١٠^{٩})^{٢} +(٥٨,١٢×١٠^{٩})^{٢}

ف=١٤٨,٣٩٦ ×١٠^{٩} م=١٤٨,٤ ×١٠^{٩}م

ثانياً: المسافة بين الأرض و القمر

هـ=١٢,٣٧ × ٠,٤ =٤,٩٤٨=٤,٩٥

نعوض عن قيمة هـ وفق بيانية مدار القمر حول الأرض التالية:

د(هـ)= (٣٨٠٠٠٠×١٠^{٣} جتاهـ +٢٤٨٠٠٠٠٠(١- |جاهـ|)، ٣٨٠٠٠٠×١٠^{٣}جاهـ)

د(٤,٩٥)= (٣٨٠٠٠٠×١٠^{٣} جتا(٤,٩٥) +٢٤٨٠٠٠٠٠(١- |جا(٤,٩٥)|)، ٣٨٠٠٠٠×١٠^{٣} جا(٤,٩٥))

د(٤,٩٥)=(٠,٠٩×١٠^{٩}، -٠,٣٧×١٠^{٩})

ف^{٢} =(٠,٠٩)^{٢} + (-٠,٣٧×١٠^{٩})^{٢}

ف=٣٨٠١٦٤,٦٢ × ١٠^{٣} م= ٠,٣٨ × ١٠^{٩} م

$\boxed{\text{ف}=٠,٣٨\times ١٠^{٩}\ \text{م}}$

ظاهـ = $\frac{\text{ص}}{\text{س}}$ = $\frac{-٠,٣٧\times ١٠^{٩}}{٠,٠٩\times ١٠^{٩}}$ = - $\frac{,٣٧}{,٠٩}$ = -٤,٢٠

ظاهـ =-٤,٢٠ ⇐ هـ =-١,٤٠ = ٢π +(-١,٤) =٤,٩٥

٤,٩٥= $\frac{٢\pi}{٢٩}$ ز

٢π ز = ٤,٩٥ × ٢٩=١٤٢

ز=٢٢,٦ ≅ ٢٢ يوم

ثالثاً: نحسب المسافة بين القمر و الشمس

بيانية مدار القمر للشمس = بيانية مدار الأرض للشمس+بيانية مدار القمر للأرض

د(٠,٤)= (١٣٦,٥٤×١٠^{٩}،٥٨,١٢×١٠^{٩})+(٠,٠٩×١٠^{٩}،٠,٣٧×١٠^{٩})

د(٠,٤)=(١٣٦,٦٣×١٠^{٩}،٥٨,٤٩×١٠^{٩})

ف^{٢} =(١٣٦,٦٣ × ١٠^{٩})^{٢} + (٥٨,٤٩×١٠^{٩})^{٢}

$\boxed{\text{ف}=١٤٨,٦٢٣\times ١٠^{٩}\ \text{م} = ١٤٨,٦\times ١٠^{٩}\ \text{م}}$

د(٠,٤)=(١٣٦,٦٣×١٠^{٩}،٥٨,٤٩×١٠^{٩})

س=١٣٦,٦٣×١٠^{٩} ، ص=٥٨,٤٩×١٠^{٩}

ظاهـ = $\frac{\text{ص}}{\text{س}}$ = $\frac{٥٨,٤٩\times ١٠^{٩}}{١٣٦,٣٦\times ١٠^{٩}}$ = $\frac{٥٨,٤٩}{١٣٦,٦٣}$=٠,٤٣

ظاهـ =٠,٤٣ ⇐ هـ =٠,٤

د(٠,٤)=(١٣٦,٦٣×١٠^{٩}،٥٨,٤٩×١٠^{٩})

هـ = ω ز

٠,٤ = $\frac{٢\pi}{٣٥٤}$ ز

٢π ز =٠,٤ × ٣٥٤=١٤٣,٢

٢π ز = ١٤٣,٢ ⇐ ز = ٢٢,٧٩ يوم = $\frac{٢٢,٧٩}{٢٧}$ = ٠,٨٤ ≈ ١

التاريخ الهجري الذي يقابل التاريخ الميلادي ٢٣ يناير ٢٠١٤م يقابله كالتالي:

اليوم = ٦

الشهر= ١ + ٢ =٣ (٢= محرم+ صفر)

التاريخ الهجري ≅ ٢٢ ربيع الأول ١٤٣٥هـ

Abstract

'Al_Pianiyeh' is a mathematical book which offers a new method and mathematical form to deal with the functions Which is called 'Al_Pianiyeh' or 'graphic' in English language .

'Al_Pianiyeh' is the same as the function but it has a different formula , in other word it is a advanced style to represent the graphic of function on the coordinates. The idea of **alpianiyeh** based on the represent of a straight pieces , after that it is developed to include to represent a section of the curve , geometric shapes such as a square and rectangle and surfaces.

In the following example ,we will explain the relationship between function and pianiyeh .In the general , the function is given by the below formula:

$Y = f(x)$

For example

$$f(x)=\begin{cases}1 & \text{if} \quad -1\le x\le 1\\ 0 & \text{if} \quad x>1 \text{and} x<-1\end{cases}$$

Whereas **the pianiyeh** is given by the following formula:

$F(h) = (x(h) , y(h))$

Where x(h) is representing x-axis (domain) , y(h) is representing y-axis (range) and h is a variable which controls for each values of x and y.

while we can represent previous function by using the formula of **alpianiyeh** like that

F(h) = (sin(h) , ١)

While h takes any value , the value of x will be in [-١,١] and y always takes ١.

Another example, the equation of the circle with the center at the origin and radius ١ takes the following form:

that will equivalent to **the alpianiyeh** $x^2 + y^2 = 1$

$f(x) = (\cos(x) , \sin (x))$

As well as , we can use **the alpianiyeh** in physical science and studying outer space such as earth's rotation and so on . But in this book, we try explain the idea and the concept of **alpianiyeh** and it's formula.

Also, we explain the relationship between the **alpianiyeh** and function and how we can convert from **alpianiyeh** to function and vice versa and about how to represent pieces of straight and a section of the curve and also the circle,ellipse, square and rectangle and surfaces as well as listing some properties of **alpianiyeh**. Addition to find the differentiation and integration of **alpianiyeh** and so on.

تم بحمد الله