مجموع الفرق وفرق المجموع

كتاب في الرياضيات

$$\sum \Delta\, \text{د(هـ)} = \Delta \sum \text{د(هـ)}$$

تأليـــــف :
م.محمد سلام علي صالح القليح

مايو / 2019م

الفهـــــــــــرس

بسم الله الرحمن الرحيم

المقدمـــة

الحمد لله رب العالمين ،والصلاة والسلام على سيدنا محمد بن عبدالله الصادق الأمين خاتم الأنبياء والمرسلين وعلى آله وصحبه أجمعين أما بعد:
فانـه بحمد الله وفضله وتوفيقاً منـه عز وجل ، يسرني ويسعدني أن أقدم إليكم الكتاب المتواضع والذي أسمته **مجموع الفرق وفرق المجموع** والذي أرجو أن يحقق الفائدة. وهو كتاب رياضي يهتم في مجال المجاميع. حيث وهذا الكتاب يسهل في طريقة جديدة و مبتكرة في أيجاد مجموع بعض الدوال مثل دالة الجيب ودالة جيب التام وغيرها من الدوال وذالك بواسطة العلاقة العكسية بين المجموع والفرقً وهذا ما سنتطرق إليه أن شاء الله في هذا الكتاب والذي قسمناه إلى فصلين.ففي الفصل الأول سوف نوضح العلاقة بين المجموع و الفرق.أما في الفصل الثاني سنكتفي في سرد مجاميع بعض الدوال مع الإثبات والتوضيح بالأمثلة .

والله الموفق،،،

المؤلف

الفصل الأول :

المجموع و الفرق

١٠١ المدخل

الموضوع الذي نحن من أجله هو أيجاد المجاميع المعقدة لبعض الدوال مثل مجموع الدوال المثلثة مثل $\sum_{\text{ر}=\text{١}}^{\text{ن}} \text{جا}(\text{ر})$ والدوال الكسرية وغيرها من الدوال الأخرى ٠ حيث يمكن إيجاد لمجاميع لهذه الدوال من العلاقة بين المجاميع و الفروق , ولكن قبل كل شي لأبد أولاً التطرق إلى المجموع و الفرق ٠

٢٠١ المجموع ($\sum$)

كما هو معروف لنا مما تعلمنا أن

$$\boxed{\sum_{\text{هـ}=\text{١}}^{\text{ن}} \text{د}(\text{هـ}) = \text{د}(\text{ن}) \leftarrow (\text{١})}$$

و فما يلي نورد بعض الأمثلة على ذالك

١) $\sum_{\text{هـ}=\text{١}}^{\text{ن}} \text{٢} = \text{٢ن}$

٢) $\sum_{\text{هـ}=\text{١}}^{\text{ن}} \text{هـ} = \dfrac{\text{ن}(\text{١}+\text{ن})}{\text{٢}}$

٣) $\sum_{\text{هـ}=\text{١}}^{\text{ن}} (\text{٢هـ} - \text{١}) = \text{ن}^{\text{٢}}$

٣٠١ الفرق (Δ)

معروف لدينا أن (Δ) تعطى بالقانون التالي :

$$\boxed{\Delta \text{د}(\text{هـ}) = \text{د}(\text{هـ}+\text{١}) - \text{د}(\text{هـ}) \leftarrow (\text{٢})}$$

أمثلة على ذالك

١) $\Delta (\text{هـ}) = (\text{هـ}+\text{١}) - \text{هـ} = \text{١}$

$\Delta \text{ هـ} = \text{١}$

٢) $\Delta \text{ هـ}^{\text{٢}} = (\text{هـ}+\text{١})^{\text{٢}} - \text{هـ}^{\text{٢}} = \text{هـ}^{\text{٢}} + \text{٢هـ} + \text{١} - \text{هـ}^{\text{٢}}$

$\Delta \text{هـ}^{\text{٢}} = \text{٢هـ} + \text{١}$

٣) $\Delta \text{جاهـ} = \text{جا}(\text{هـ}+\text{١}) - \text{جاهـ} = \text{٢ جا } \tfrac{\text{١}}{\text{٢}} \text{ جتا}(\text{هـ} + \tfrac{\text{١}}{\text{٢}})$

٤) $\Delta \text{جتاهـ} = \text{جتا}(\text{هـ}+\text{١}) - \text{حتاهـ} = -\text{٢ جا } \tfrac{\text{١}}{\text{٢}} \text{ جا}(\text{هـ} + \tfrac{\text{١}}{\text{٢}})$

٤٠١ **العلاقة بين** المجموع ($\sum$) و الفرق (Δ)

و هذا الموضوع الذي نحن من أجله والذي سوف يساعدنا في إيجاد بعض المجاميع المعقدة٠ معلوم لدينا مما سبق

١) $\Delta د(هـ) = د(هـ+١) - د(هـ)$ علاقة رقم (٢)

بأخذ $\sum_{هـ=١}^{ن}$ للطرفين نحصل على الأتي

$$\sum_{هـ=١}^{ن} \Delta د(هـ) = \sum_{هـ=١}^{ن} د(هـ+١) - \sum_{هـ=١}^{ن} د(هـ)$$

$$= \cancel{د(٢)} + \cancel{د(٣)} + \cancel{د(٤)} + \cdots + \cancel{د(ن)} + د(ن+١) - د(١) - \cancel{د(٢)}$$

$$- \cancel{د(٣)} - \cancel{د(٤)} - \cdots - \cancel{د(ن-١)} - \cancel{د(ن)}$$

$$= د(ن+١) - د(١)$$

$$\therefore \sum_{هـ=١}^{ن} \Delta د(هـ) = د(ن+١) - د(١) \longrightarrow (٣)$$

٢) وأيضاً كما هو معروف لدينا أن

$$\sum_{هـ=١}^{ن} د(هـ) = د(١) + د(٢) + \cdots\cdots + د(ن-١) + د(ن)$$

بأخذ Δ للطرفين نستنتج التالي:

$$\Delta \sum_{هـ=١}^{ن} د(هـ) = \Delta د(١) + \Delta د(٢) + \cdots\cdots + \Delta د(ن-١) + \Delta د(ن)$$

$$= \cancel{د(٢)} - د(١) + \cancel{د(٣)} - \cancel{د(٢)} + \cancel{د(٤)} - \cancel{د(٣)} + \cdots\cdots$$

$$+ \cancel{د(ن)} - \cancel{د(ن-١)} + د(ن+١) - \cancel{د(ن)}$$

$$= د(ن+١) - د(١)$$

$$\therefore \Delta \sum_{هـ=١}^{ن} د(هـ) = د(ن+١) - د(١) \longrightarrow (٤)$$

من العلاقة (٣) ، (٤) نستنتج أن

$$\Delta \sum_{هـ=١}^{ن} د(هـ) = \sum_{هـ=١}^{ن} \Delta د(هـ) = د(ن+١) - د(١) \longrightarrow (٥)$$

قاعدة (١٠١):

أن العلاقة بين سجما ($\sum$) و **دالتا** (Δ) هي علاقة عكسية أي أن

$$\Delta \sum_{هـ=١}^{ن} د(هـ) = \sum_{هـ=١}^{ن} \Delta د(هـ) = د(ن+١) - د(١) \longrightarrow (٥)$$

نتيجة (١٠١):

$$\Delta \sum_{هـ=جـ}^{ن} د(هـ) = \sum_{هـ=جـ}^{ن} د(هـ)\Delta = د(ن+١) - د(جـ)$$

تعليق:
كما هو معروف إن تكامل الدالة كثرة حدود يزيد رتبة س بمقدار واحد وهذا يشبه المجموع ، فمجموع دالة كثرة حدود يزيد رتبة س بمقدار واحد ٠

فمثلاً $\sum_{هـ=١}^{ن} هـ = \frac{١}{٢} ن^{٢} + \frac{١}{٢} ن$

من المثال أعلى نجد أن ناتج مجموع الدالة من الدرجة الأول (هـ) هي دالة من الدرجة الثانية وبالمثل مشتقة دالة كثرة حدود ينقص رتبة س بمقدار واحد وهذا يشابه الفرق والذي أيضاً ينقص بمقدار واحد ٠

فمثلاً Δ هـ^{٢} = ٢هـ + ١

فمن المثال أعلى نجد أن ناتج فرق دالة من الدرجة الثانية هـ^{٢} هي دالة من الدرجة الأولى ٠
أي أن مما سبق يمكن الفول الأتي:

- أن العلاقة بين التكامل و المجموع علاقة طردية ٠
- والعلاقة بين المشتقة و الفرق أيضاً علاقة طردية ٠
- و العلاقة بين المشتقة و التكامل هي علاقة عكسية ٠

نستنتج مما سبق
١) أن العلاقة بين المجموع و الفرق هي أيضاً علاقة عكسية٠
٢) يمكن إعادة صياغة العلاقة رقم (١) بالصورة الرياضية التالية:

$$\sum_{هـ=١}^{ن} د(هـ)\ \Delta هـ = د(ن) \quad ، \quad \Delta هـ = ١$$

مثال (١٠١):- أوجد د(هـ) فما يلي؟

١) $\sum_{هـ=١}^{ن} د(هـ)\ \Delta هـ = \frac{ن(ن+١)}{٢}$

٢) $\sum_{هـ=١}^{ن} د(هـ)\ \Delta هـ = ن$

٣) $\sum_{هـ=١}^{ن} د(هـ)\ \Delta هـ = ن^{٢}$

٤) $\sum_{هـ=١}^{ن} د(هـ)\ \Delta هـ = جا(ن)$

٥) $\sum_{هـ=١}^{ن} د(هـ)\ \Delta هـ = \frac{-ن}{ن+١}$

الحـــــل :-

١) $\sum\limits_{\text{هـ}=١}^{\text{ن}} \text{د(هـ)}\ \Delta\text{هـ} = \frac{\text{ن(ن}+١)}{٢}$

بأخذ Δ للطرفين

$\Delta \sum\limits_{\text{هـ}=١}^{\text{ن}} \text{د(هـ)}\ \Delta\text{هـ} = \frac{١}{٢}\left(\Delta\text{ن}^{٢} + \Delta\text{ن}\right)$

$\text{د(ن}+١) = \frac{١}{٢}\left(٢\text{ن}+١+١\right) = \frac{١}{٢}\left(٢\text{ن}+٢\right) = \text{ن}+١$

$\text{د(ن}+١) = \text{ن}+١$

ضع ن = هـ - ١

$\text{د(هـ}-\cancel{١}+\cancel{١}) = \text{هـ}-\cancel{١}+\cancel{١}$

$\text{د(هـ)} = \text{هـ}$

٢) $\sum\limits_{\text{هـ}=١}^{\text{ن}} \text{د(هـ)}\ \Delta\text{هـ} = \text{ن}$

بأخذ Δ للطرفين

$\Delta \sum\limits_{\text{هـ}=١}^{\text{ن}} \text{د(هـ)}\ \Delta\text{هـ} = \Delta\text{ن}$

$\text{د(ن}+١) = \cancel{\text{ن}}+١-\cancel{\text{ن}}$

$\text{د(ن}+١) = ١$

ضع ن =هـ - ١

$\text{د(هـ)} = ١$

٣) $\sum\limits_{\text{هـ}=١}^{\text{ن}} \text{د(هـ)}\ \Delta\text{هـ} = \text{ن}^{٢}$

بأخذ Δ للطرفين

$\Delta \sum\limits_{\text{هـ}=١}^{\text{ن}} \text{د(هـ)}\ \Delta\text{هـ} = \Delta\text{ن}^{٢}$

$\text{د(ن}+١) = (\text{ن}+١)^{٢} - \text{ن}^{٢}$

$= \cancel{\text{ن}^{٢}} + ٢\text{ن} + ١ - \cancel{\text{ن}^{٢}}$

$\text{د(ن}+١) = ٢\text{ن}+١$

ضع ن=هـ - ١

$\text{د(هـ)} = ٢(\text{هـ}-١)+١$

$= ٢\text{هـ}-٢+١ = ٢\text{هـ}+١$

$\therefore \text{د(هـ)} = ٢\text{هـ}+١$

٤) $\sum_{\text{هـ}=\text{١}}^{\text{ن}} \text{د(هـ)}\ \Delta\text{هـ} = \text{جا(ن)}$

بأخذ Δ للطرفين

$$\Delta \sum_{\text{هـ}=\text{١}}^{\text{ن}} \text{د(هـ)}\ \Delta\text{هـ} = \Delta\ \text{جا(ن)}$$

$$\text{د(ن+١)} = \text{جا(ن+١)} - \text{جا(ن)}$$

$$\text{د(ن+١)} = \text{٢ جتا}\ \tfrac{\text{١}}{\text{٢}}\ \text{جا}\left(\text{ن} + \tfrac{\text{١}}{\text{٢}}\right)$$

ضع ن = هـ - ١

$$\text{د(هـ)} = \text{٢جتا}\ \tfrac{\text{١}}{\text{٢}}\ \text{جا}\left(\text{هـ} - \tfrac{\text{١}}{\text{٢}}\right)$$

٥) $\sum_{\text{هـ}=\text{١}}^{\text{ن}} \text{د(هـ)}\ \Delta\text{هـ} = \frac{-\text{ن}}{\text{ن}+\text{١}}$

بأخذ Δ للطرفين

$$\sum_{\text{هـ}=\text{١}}^{\text{ن}} \text{د(هـ)}\ \Delta\text{هـ} = \Delta\left(\frac{-\text{ن}}{\text{ن}+\text{١}}\right)$$

$$\text{د(ن+١)} = \frac{-(\text{ن}+\text{١})}{\text{ن}+\text{١}+\text{١}} - \frac{-\text{ن}}{\text{ن}+\text{١}}$$

$$= \frac{-(\text{ن}+\text{١})}{\text{ن}+\text{٢}} + \frac{\text{ن}}{\text{ن}+\text{١}}$$

$$= \frac{-(\text{ن}+\text{١})(\text{ن}+\text{١}) + (\text{ن}+\text{٢})}{(\text{ن}+\text{٢})(\text{ن}+\text{١})}$$

$$= \frac{-\text{ن}^{\text{٢}} - \text{٢ن} - \text{١} + \text{ن}^{\text{٢}} + \text{٢ن}}{(\text{ن}+\text{٢})(\text{ن}+\text{١})}$$

$$\text{د(ن+١)} = \frac{-\text{١}}{(\text{ن}+\text{٢})(\text{ن}+\text{١})}$$

ضع ن = هـ + ١

$$\text{د(هـ)} = \frac{-\text{١}}{\text{هـ}(\text{هـ}+\text{١})}$$

أي أن $\sum_{\text{هـ}=\text{١}}^{\text{ن}} \frac{-\Delta\text{هـ}}{\text{هـ}(\text{هـ}+\text{١})} = \frac{-\text{ن}}{\text{ن}+\text{١}}$

$$\sum_{\text{هـ}=\text{١}}^{\text{٥}} \frac{-\Delta\text{هـ}}{\text{هـ}(\text{هـ}+\text{١})} = \frac{-\text{٥}}{\text{٦}}$$

$$\frac{-\text{١}}{\text{٢}} + \frac{-\text{١}}{\text{٦}} + \frac{-\text{١}}{\text{١٢}} + \frac{-\text{١}}{\text{٢٠}} + \frac{-\text{١}}{\text{٣٠}} = \frac{-\text{٥}}{\text{٦}}$$

$$\frac{-(\text{٣٠}+\text{١٠}+\text{٥}+\text{٣}+\text{٢})}{\text{٦٠}} = \frac{-\text{٥}}{\text{٦}}$$

$$\frac{-\text{٥٠}}{\text{٦٠}} = \frac{-\text{٥}}{\text{٦}} \Leftrightarrow \frac{-\text{٥}}{\text{٦}} = \frac{-\text{٥}}{\text{٦}}$$

مثال (٢٠١):- أوجد د(هـ) لكل ما يلي ؟

١) Δ د(هـ) = ١ ، د(١) = ١

٢) Δ د(هـ) = ٢هـ + ١ ، د(١) = ٠

٣) Δ د(هـ) = ١ ، د(١) = ٠

الحل:-

١) Δ د(هـ) = ١ ، د(١) = ١

بأخذ $\sum\limits_{هـ=١}^{ن}$ للطرفين

$$\sum_{هـ=١}^{ن} \Delta \; د(هـ) \; \Delta هـ = \sum_{هـ=١}^{ن} ١ \; \Delta هـ$$

د(ن+١) – د(١) = ن

د(ن+١) = ن + د(١) ، د(١)=١

د(ن+١) = ن+١

ضع ن =هـ -١

$\therefore$ د(هـ) = هـ

٢) Δ د(هـ) = ٢هـ + ١ ، د(١) = ٠

بأخذ $\sum\limits_{هـ=١}^{ن}$ للطرفين

$$\sum_{هـ=١}^{ن} \Delta \; د(هـ) \; \Delta هـ = \sum_{هـ=١}^{ن} (٢هـ + ١) \; \Delta هـ$$

$$د(ن+١) - د(١) = ٢ \sum_{هـ=١}^{ن} هـ \; \Delta هـ + \sum_{هـ=١}^{ن} \Delta هـ$$

$$= ٢ \; \frac{ن(ن+١)}{٢} + ن$$

$= ن^{٢} + ن + ن = ن^{٢} + ن$ + ن

د(ن+١) = $ن^{٢}$ + ن + ١ ، د(١) = ٠

د(ن+١) = $(ن + ١)^{٢}$

ضع ن = هـ -١

د(هـ) = $(هـ -١ + ١)^{٢}$

$\therefore$ د(هـ) = $هـ^{٢}$

٣) Δ د(هـ) = ١ ، د(١)=٠

بأخذ $\sum_{هـ=١}^{ن}$ للطرفين

$\sum_{هـ=١}^{ن} \Delta$ د(هـ) Δهـ= $\sum_{هـ=١}^{ن}$ ١ Δهـ

د(ن+١) – د(١) = ن

د(ن+١) = ن + د(١) ، د(١)=٠

د(ن+١) = ن

ضع ن = هـ - ١

د(هـ) = هـ - ١

أي أن

Δ (هـ - ١) =١

Δ هـ - Δ ١ =١

~~هـ~~ + ١ – ~~هـ~~ - (١ - ١) =١

١ – صفر = ١

١ = ١

٥٠١ خواص المجموع

وفي هذا الجزء سنحاول سرد بعض خواص المجموع والتي سوف تساعدنا في إيجاد مجاميع بعض الدوال ٠

خاصية ١٠١:

$$\sum_{\text{هـ}=١}^{\text{ن}} \text{د}(\text{هـ}+١)\,\Delta\text{هـ} - \sum_{\text{هـ}=١}^{\text{ن}} \text{د}(\text{هـ}-١)\,\Delta\text{هـ} = \text{د}(\text{ن}+١)+\text{د}(\text{ن})-\text{د}(١)-\text{د}(٠)$$

$$\sum_{\text{هـ}=١}^{\text{ن}} \text{د}(\text{هـ}+١)\,\Delta\text{هـ} - \sum_{\text{هـ}=١}^{\text{ن}} \text{د}(\text{هـ}-١)\,\Delta\text{هـ} = \text{د}(٢)+\text{د}(٣)+\text{د}(٤)+٠٠٠٠+\text{د}(\text{ن}-١)$$
$$+\,\text{د}(\text{ن})+\text{د}(\text{ن}+١)-\text{د}(٠)-\text{د}(١)-\text{د}(٢)-\text{د}(٣)\,٠٠٠٠\,\text{د}(\text{ن}-١)$$

$$=\text{د}(\text{ن}+١)+\text{د}(\text{ن})-\text{د}(١)-\text{د}(٠)$$

$$\therefore \sum_{\text{هـ}=١}^{\text{ن}} \text{د}(\text{هـ}+١)\,\Delta\text{هـ} - \sum_{\text{هـ}=١}^{\text{ن}} \text{د}(\text{هـ}-١)\,\Delta\text{هـ} = \text{د}(\text{ن}+١)+\text{د}(\text{ن})-\text{د}(١)-\text{د}(٠)$$

مثال على ذالك

أذا كانت $\text{د}(\text{هـ}) = \frac{١}{\text{ن}+١} \Leftarrow \text{د}(\text{هـ}+١) = \frac{١}{\text{ن}+٢}$ ، $\text{د}(\text{هـ}-١) = \frac{١}{\text{ن}}$، $\text{د}(١) = \frac{١}{٢}$، $\text{د}(٠)=١$

$$\because \sum_{\text{هـ}=١}^{\text{ن}} \text{د}(\text{هـ}+١)\,\Delta\text{هـ} - \sum_{\text{هـ}=١}^{\text{ن}} \text{د}(\text{هـ}-١)\,\Delta\text{هـ} = \text{د}(\text{ن}+١)+\text{د}(\text{ن})-\text{د}(١)-\text{د}(٠)$$

$$\sum_{\text{هـ}=١}^{\text{ن}} \frac{\Delta\text{هـ}}{\text{ن}+٢} - \sum_{\text{هـ}=١}^{\text{ن}} \frac{\Delta\text{هـ}}{\text{ن}} = \frac{١}{\text{ن}+٢} + \frac{١}{\text{ن}+١} - \frac{١}{٢} - ١ = \frac{١}{\text{ن}+٢} + \frac{١}{\text{ن}+١} - \frac{٣}{٢}$$

$$\sum_{\text{هـ}=١}^{\text{ن}} \frac{-٢\Delta\text{هـ}}{\text{ن}(\text{ن}+٢)} = \frac{-(٣\text{ن}^{٢}+٥\text{ن})}{٢(\text{ن}+١)(\text{ن}+٢)}$$

$$\sum_{\text{هـ}=١}^{\text{ن}} \frac{\Delta\text{هـ}}{\text{ن}(\text{ن}+٢)} = \frac{٣\text{ن}^{٢}+٧\text{ن}}{٤(\text{ن}+١)(\text{ن}+٢)}$$

خاصية ٢٠١:

$\sum_{\text{هـ}=١}^{\text{ن}}$ د(هـ)[∆د(هـ)+ ∆د(هـ-١)] ∆هـ = $\sum_{\text{هـ}=١}^{\text{ن}}$ د(هـ)[د(هـ+١)-د(هـ-١)] ∆هـ=د(ن)د(ن+١)- د(١)د(٠)

∆د(هـ)=د(هـ+١)-د(هـ) ←(١)

∆د(هـ-١)=د(هـ)-د(هـ-١) ←(٢)

بجمع (١) ، (٢)

∆د(هـ)+ ∆د(هـ-١)=د(هـ+١)-د(هـ-١)

بضرب الطرفين د(هـ)

د(هـ) [∆د(هـ)+ ∆د(هـ-١)]=د(هـ)د(هـ+١) – د(هـ)د(هـ-١)

بأخذ $\sum_{\text{هـ}=١}^{\text{ن}}$ للطرفين

$\sum_{\text{هـ}=١}^{\text{ن}}$ د(هـ) [∆د(هـ)+ ∆د(هـ-١)] ∆هـ = $\sum_{\text{هـ}=١}^{\text{ن}}$ د(هـ)د(هـ+١) ∆هـ- $\sum_{\text{هـ}=١}^{\text{ن}}$ د(هـ)د(هـ-١) ∆هـ

$\sum_{\text{هـ}=١}^{\text{ن}}$ د(هـ)د(هـ+١) ∆هـ- $\sum_{\text{هـ}=١}^{\text{ن}}$ د(هـ)د(هـ-) ∆هـ =د(١)د(٢)+د(٢)د(٣)+ د(٣)د(٤)+٠٠٠٠+ د(ن-١)د(ن)+د(ن)د(ن+١)-د(١)د(٠)-د(٢)د(١)- د(٣)د(٢)٠٠٠ – د(ن)د(ن-١) = د(ن)د(ن+١)-د(٠)د(١)

مثال على ذالك

أذا كانت د(هـ)=جاهـ ⇐ د(هـ+١)=جا(هـ+١) ،د(هـ-١)=جا(هـ-١)

$\sum_{\text{هـ}=١}^{\text{ن}}$ د(هـ)[د(هـ+١)-د(هـ-١)] ∆هـ=د(ن)د(ن+١)-د(١)د(٠) ، د(٠)=٠

$\sum_{\text{هـ}=١}^{\text{ن}}$ جاهـ[جا(هـ+١)-جا(هـ-١)] ∆هـ=جان جا(ن+١)

$\sum_{\text{هـ}=١}^{\text{ن}}$ جاهـ [٢جا١ جتاهـ] ∆هـ=جان جا(ن+١)

$\sum_{\text{هـ}=١}^{\text{ن}}$ جا١ [٢جاهـ جتاهـ] ∆هـ=جان جا(ن+١)

جا١ $\sum_{\text{هـ}=١}^{\text{ن}}$ جا٢هـ ∆هـ= جان جا(ن+١)

$\sum_{\text{هـ}=١}^{\text{ن}}$ جا٢هـ∆هـ = $\frac{\text{جا ن جا(ن + ١)}}{\text{جا ١}}$

خاصية (٣٠١):

$$\sum_{\text{هـ}=١}^{\text{ن}} \frac{\text{د}(\text{هـ}+١)\text{د}(\text{هـ}-١)-\text{د}(\text{هـ})\text{د}(\text{هـ})}{\text{د}(\text{هـ})\text{د}(\text{هـ}-١)}\Delta\text{هـ} = \sum_{\text{هـ}=١}^{\text{ن}} \left(\frac{\text{د}(\text{هـ}+١)}{\text{د}(\text{هـ})} - \frac{\text{د}(\text{هـ})}{\text{د}(\text{هـ}-١)}\right)\Delta\text{هـ} = \frac{\text{د}(\text{ن}+١)}{\text{د}(\text{ن})} - \frac{\text{د}(١)}{\text{د}(٠)}$$

$$\sum_{\text{هـ}=١}^{\text{ن}} \frac{\text{د}(\text{هـ}+١)\text{د}(\text{هـ}-١)-\text{د}(\text{هـ})\text{د}(\text{هـ})}{\text{د}(\text{هـ})\text{د}(\text{هـ}-١)}\Delta\text{هـ} = \sum_{\text{هـ}=١}^{\text{ن}} \left(\frac{\text{د}(\text{هـ}+١)}{\text{د}(\text{هـ})} - \frac{\text{د}(\text{هـ})}{\text{د}(\text{هـ}-١)}\right)\Delta\text{هـ}$$

$$= \sum_{\text{هـ}=١}^{\text{ن}} \frac{\text{د}(\text{هـ}+١)}{\text{د}(\text{هـ})}\Delta\text{هـ} - \sum_{\text{هـ}=١}^{\text{ن}} \frac{\text{د}(\text{هـ})}{\text{د}(\text{هـ}-١)}\Delta\text{هـ}$$

$$= \frac{\text{د}(٢)}{\text{د}(١)} + \frac{\text{د}(٣)}{\text{د}(٢)} + \frac{\text{د}(٤)}{\text{د}(٣)} + \cdots + \frac{\text{د}(\text{ن})}{\text{د}(\text{ن}-١)} + \frac{\text{د}(\text{ن}+١)}{\text{د}(\text{ن})} - \frac{\text{د}(١)}{\text{د}(٠)} - \frac{\text{د}(٢)}{\text{د}(١)} - \frac{\text{د}(٣)}{\text{د}(٢)} - \cdots - \frac{\text{د}(\text{ن})}{\text{د}(\text{ن}-١)}$$

$$= \frac{\text{د}(\text{ن}+١)}{\text{د}(\text{ن})} - \frac{\text{د}(١)}{\text{د}(٠)}$$

مثال على ذالك

ضع $\text{د}(\text{هـ}) = \text{ن}+١ \Leftarrow \text{د}(\text{هـ}+١)=\text{ن}+٢$ ، $\text{د}(\text{هـ}-١)=\text{ن}$

$$\sum_{\text{هـ}=١}^{\text{ن}} \frac{\text{د}(\text{هـ}+١)\text{د}(\text{هـ}-١)-\text{د}(\text{هـ})\text{د}(\text{هـ})}{\text{د}(\text{هـ})\text{د}(\text{هـ}-١)}\Delta\text{هـ} = \frac{\text{د}(\text{ن}+١)}{\text{د}(\text{ن})} - \frac{\text{د}(١)}{\text{د}(٠)} \text{ ، } \text{د}(١)=٢ \text{ ، } \text{د}(٠)=١$$

$$\sum_{\text{هـ}=١}^{\text{ن}} \frac{\text{ن}(\text{ن}+٢)-(\text{ن}+١)(\text{ن}+١)}{\text{ن}(\text{ن}+١)}\Delta\text{هـ} = \frac{\text{ن}+٢}{\text{ن}+١} - \frac{٢}{١}$$

$$\sum_{\text{هـ}=١}^{\text{ن}} \frac{-١}{\text{ن}(\text{ن}+١)}\Delta\text{هـ} = \frac{\text{ن}+٢}{\text{ن}+١} - ٢$$

$$\sum_{\text{هـ}=١}^{\text{ن}} \frac{\Delta\text{هـ}}{\text{ن}(\text{ن}+١)} = ٢ - \frac{\text{ن}+٢}{\text{ن}+١} = \frac{\text{ن}}{\text{ن}+١}$$

$$\boxed{\sum_{\text{هـ}=١}^{\text{ن}} \frac{\Delta\text{هـ}}{\text{ن}(\text{ن}+١)} = \frac{\text{ن}}{\text{ن}+١}}$$

مثال (٣٠١) أوجد ناتج $\sum_{\text{هـ}=١}^{١٠٠} \frac{\text{ن}^٢+\text{ن}-١}{\text{ن}(\text{ن}+١)}\Delta\text{هـ}$

الحل:

$$\sum_{\text{هـ}=١}^{١٠٠} \frac{\text{ن}^٢+\text{ن}-١}{\text{ن}(\text{ن}+١)}\Delta\text{هـ} = \sum_{\text{هـ}=١}^{١٠٠} \left(١ - \frac{١}{\text{ن}(\text{ن}+١)}\right)\Delta\text{هـ} = \sum_{\text{هـ}=١}^{١٠٠} \Delta\text{هـ} - \sum_{\text{هـ}=١}^{١٠٠} \frac{\Delta\text{هـ}}{\text{ن}(\text{ن}+١)}$$

$$\sum_{\text{هـ}=١}^{١٠٠} \frac{\text{ن}^٢+\text{ن}-١}{\text{ن}(\text{ن}+١)}\Delta\text{هـ} = ١٠٠ - \frac{١٠٠}{١٠١} = \frac{١٠٠٠٠}{١٠١} \approx ٩٩,٠٠٩٩$$

الفصل الثاني :

مجاميع بعض الدوال

١٠٢ مجاميع الدوال المثلثة

في هذا الجزء سنحاول أيجاد مجاميع بعض الدوال المثلثة كدالة الجيب و دالة جيب التام وغيرها من الدوال الأخرى ٠

١٠١٠٢ مجموع جاهـ و جتاهـ

قاعدة (١٠٢):

١) $$\sum_{\text{هـ}=1}^{\text{ن}} \text{جاهـ}\ \Delta\text{هـ} = \frac{\text{حتا}(\text{ن}+1) + \text{جتا}(\text{ن}) - \text{جتا}(1) - 1}{-2\text{حا}(1)} = \frac{\text{جا}\frac{\text{ن}}{2}\ \text{جا}\frac{(\text{ن}+1)}{2}}{\text{جا}\frac{1}{2}}$$

٢) $$\sum_{\text{هـ}=1}^{\text{ن}} \text{جتاهـ}\ \Delta\text{هـ} = \frac{\text{جا}(\text{ن}+1) + \text{جا}(\text{ن}) - \text{جا}(1)}{2\text{حا}(1)} = \frac{\text{جا}\frac{\text{ن}}{2}\ \ \text{جتا}\frac{(\text{ن}+1)}{2}}{\text{جا}\frac{1}{2}}$$

لإثبـــات :

١) $\because\ \Delta\text{جتاهـ} = \text{جتا}(\text{هـ}+1) - \text{جتاهـ}$

$\Delta\ \text{جتاهـ} = -2\ \text{جا}\frac{1}{2}\ \text{جا}(\text{هـ}+\frac{1}{2}) \rightarrow (1)$

$\because\ \Delta\text{جتا}(\text{هـ}-1) = \text{جتاهـ} - \text{جتا}(\text{هـ}-1)$

$\Delta\text{جتا}(\text{هـ}-1) = -2\ \text{جا}(\text{هـ}-\frac{1}{2})\text{جا}\frac{1}{2} \rightarrow (2)$

بجمع (١) ، (٢) نحصل على

$\Delta\text{جتاهـ} + \Delta\text{جتا}(\text{هـ}-1) = -2\ \text{جا}\frac{1}{2}\ \text{جا}(\text{هـ}+\frac{1}{2}) + -2\ \text{جا}\frac{1}{2}\ \text{جا}(\text{هـ}-\frac{1}{2})$

$= -2\text{جا}\frac{1}{2}\ (\text{جا}(\text{هـ}+\frac{1}{2}) + \text{جا}(\text{هـ}-\frac{1}{2}))$

$= -2\text{جا}\frac{1}{2}\ (2\text{جتا}\frac{1}{2}\text{جاهـ})$

$= -2(2\text{جا}\frac{1}{2}\ \text{جتا}\frac{1}{2})\text{جاهـ} = -2\text{جا}(1)\text{جاهـ}$

$\therefore\ \Delta\text{جتاهـ} + \Delta\text{جتا}(\text{هـ}-1) = -2\text{جا}(1)\text{جاهـ} \rightarrow (3)$

بأخذ $\sum_{\text{هـ}=1}^{\text{ن}}$ للطرفين العلاقة (٣)

$$\sum_{\text{هـ}=1}^{\text{ن}} (\Delta\text{جتاهـ} + \Delta\text{جتا}(\text{هـ}-1))\ \Delta\text{هـ} = \sum_{\text{هـ}=1}^{\text{ن}} (-2\text{جا}(1)\text{جاهـ})\ \Delta\text{هـ}$$

$\sum_{هـ=١}^{ن}$ Δ جتاهـ Δهـ + $\sum_{هـ=١}^{ن}$ Δ جتا(هـ-١) Δهـ = -٢جا(١) $\sum_{هـ=١}^{ن}$ جاهـ Δهـ

حتا(ن+١) – جتا(١) + جتا (ن) - جتا(٠) =-٢جا(١) $\sum_{هـ=١}^{ن}$ جاهـ Δهـ

-٢جا(١) $\sum_{هـ=١}^{ن}$ جاهـ Δهـ = حتا(ن+١) – جتا(١) + جتا (ن) -١

∴ $\sum_{هـ=١}^{ن}$ جاهـ Δهـ = $\frac{\text{حتا(ن+١) + جتا(ن) – جتا(١) – ١}}{\text{– ٢حا(١)}}$

أو

-٢جا(١) $\sum_{هـ=١}^{ن}$ جاهـ Δهـ = حتا(ن+١) – جتا(١) + جتا (ن) -١

=[جتا(ن+١) -جتا(٠)]+[جتا(ن) -جنا(١)]

=[-٢جا $\frac{ن+١}{٢}$ جا $\frac{ن+١}{٢}$]+[-٢جا $\frac{ن+١}{٢}$ جا $\frac{ن-١}{٢}$]

=-٢جا $\frac{ن+١}{٢}$ [جا $\frac{ن+١}{٢}$ +جا $\frac{ن-١}{٢}$]

=-٢جا $\frac{ن+١}{٢}$ [٢جا $\frac{ن}{٢}$ جتا $\frac{١}{٢}$]

-٢جا(١) $\sum_{هـ=١}^{ن}$ جاهـ Δهـ =-٢جا $\frac{ن+١}{٢}$ [٢جا $\frac{ن}{٢}$ جتا $\frac{١}{٢}$]

جا(١) $\sum_{هـ=١}^{ن}$ جاهـ Δهـ =٢جتا $\frac{١}{٢}$ جا $\frac{ن}{٢}$ جا $\frac{ن+١}{٢}$

٢جا $\frac{١}{٢}$ جتا $\frac{١}{٢}$ $\sum_{هـ=١}^{ن}$ جاهـ Δهـ =٢ جتا $\frac{١}{٢}$ جا $\frac{ن}{٢}$ جا $\frac{ن+١}{٢}$

حا $\frac{١}{٢}$ $\sum_{هـ=١}^{ن}$ جاهـ Δهـ = جا $\frac{ن}{٢}$ جا $\frac{ن+١}{٢}$

$\sum_{هـ=١}^{ن}$ جاهـ Δهـ = $\frac{\text{جا} \frac{ن}{٢} \text{ جا} \frac{(ن+١)}{٢}}{\text{جا} \frac{١}{٢}}$

٢) ∵ Δجاهـ = جا(هـ+١) – جاهـ

Δجاهـ = ٢جا $\frac{\text{١}}{\text{٢}}$ جتا(هـ + $\frac{\text{١}}{\text{٢}}$) ⟵ (٤)

∵ Δجا(هـ-١) = جاهـ - جا(هـ-١)

Δجا(هـ - ١)= ٢جا $\frac{\text{١}}{\text{٢}}$ جتا(هـ - $\frac{\text{١}}{\text{٢}}$) ⟵ (٥)

بجمع العلاقة (٤) ، (٥) نجد

Δجاهـ + Δجا(هـ-١) = ٢جا $\frac{\text{١}}{\text{٢}}$ جتا(هـ + $\frac{\text{١}}{\text{٢}}$) + ٢جا $\frac{\text{١}}{\text{٢}}$ جتا(هـ - $\frac{\text{١}}{\text{٢}}$)

=٢جا $\frac{\text{١}}{\text{٢}}$ (جتا(هـ + $\frac{\text{١}}{\text{٢}}$) + جتا(هـ - $\frac{\text{١}}{\text{٢}}$))

= ٢جا $\frac{\text{١}}{\text{٢}}$ (٢ جتا $\frac{\text{١}}{\text{٢}}$ جتاهـ)

= ٢ (٢جا $\frac{\text{١}}{\text{٢}}$ جتا $\frac{\text{١}}{\text{٢}}$) جتاهـ

Δجاهـ + Δجا(هـ-١)= ٢ جا(١)جتاهـ ⟵(٦)

بأخذ $\sum_{\text{هـ}=\text{١}}^{\text{ن}}$ للطرفين العلاقة (٦) نحصل على

$\sum_{\text{هـ}=\text{١}}^{\text{ن}}$ (Δجاهـ + Δجا(هـ-١)) Δهـ= $\sum_{\text{هـ}=\text{١}}^{\text{ن}}$ (٢ جا(١)جتاهـ) Δهـ

$\sum_{\text{هـ}=\text{١}}^{\text{ن}}$ Δجاهـ Δهـ+ $\sum_{\text{هـ}=\text{١}}^{\text{ن}}$ Δجا(هـ-١) Δهـ= ٢جا(١) $\sum_{\text{هـ}=\text{١}}^{\text{ن}}$ جتاهـ Δهـ

٢جا(١) $\sum_{\text{هـ}=\text{١}}^{\text{ن}}$ جتاهـ Δهـ= $\sum_{\text{هـ}=\text{١}}^{\text{ن}}$ Δجاهـ Δهـ+ $\sum_{\text{هـ}=\text{١}}^{\text{ن}}$ Δجا(هـ-١) Δهـ

٢جا(١) $\sum_{\text{هـ}=\text{١}}^{\text{ن}}$ جتاهـΔهـ = جا(ن+١) – جا(١) + جا(ن) – حا(٠)

٢جا(١) $\sum_{\text{هـ}=\text{١}}^{\text{ن}}$ جتاهـ Δهـ= جا(ن+١) – جا(١) + جا(ن)

∴ $\sum_{\text{هـ}=\text{١}}^{\text{ن}}$ جتاهـ Δهـ= $\frac{\text{جا(ن + ١) + جا(ن) – جا(١)}}{\text{٢حا(١)}}$

أو

٢جا(١) $\sum_{\text{هـ}=\text{١}}^{\text{ن}}$ جتاهـ Δهـ= جا(ن+١) – جا(١) + جا(ن)

٢جا(١) $\sum_{\text{هـ}=\text{١}}^{\text{ن}}$ جتاهـ Δهـ=[جا(ن+١) + جا(ن)]– جا(١)

$$\text{٢جا}(\text{١})\ \sum_{\text{هـ}=\text{١}}^{\text{ن}} \text{جتاهـ}\ \Delta\text{هـ} = [\text{٢جا}\ \frac{\text{٢ن}+\text{١}}{\text{٢}}\ \text{جتا}\ \frac{\text{١}}{\text{٢}}] - [\text{٢جا}\frac{\text{١}}{\text{٢}}\text{جتا}\frac{\text{١}}{\text{٢}}]$$

$$= \text{٢جتا}\frac{\text{١}}{\text{٢}}[\text{جا}\ \frac{\text{٢ن}+\text{١}}{\text{٢}} - \text{جا}\ \frac{\text{١}}{\text{٢}}]$$

$$\text{٢جا}(\text{١})\ \sum_{\text{هـ}=\text{١}}^{\text{ن}} \text{جتاهـ}\ \Delta\text{هـ} = \text{٢جتا}\ \frac{\text{١}}{\text{٢}}[\text{٢ جا}\ \frac{\text{ن}}{\text{٢}}\ \text{جتا}\ \frac{\text{ن}+\text{١}}{\text{٢}}]$$

$$\text{٤جا}\ \frac{\text{١}}{\text{٢}}\ \text{جتا}\ \frac{\text{١}}{\text{٢}}\ \sum_{\text{هـ}=\text{١}}^{\text{ن}} \text{جتاهـ}\Delta\text{هـ} = \text{٤جتا}\frac{\text{١}}{\text{٢}}\text{جا}\ \frac{\text{ن}}{\text{٢}}\ \text{جتا}\ \frac{\text{ن}+\text{١}}{\text{٢}}$$

$$\text{حا}\ \frac{\text{١}}{\text{٢}}\ \sum_{\text{هـ}=\text{١}}^{\text{ن}} \text{جتاهـ}\Delta\text{هـ} = \text{جا}\ \frac{\text{ن}}{\text{٢}}\ \text{جتا}\ \frac{\text{ن}+\text{١}}{\text{٢}}$$

$$\boxed{\sum_{\text{هـ}=\text{١}}^{\text{ن}} \text{جتاهـ}\Delta\text{هـ} = \frac{\text{جا}\ \frac{\text{ن}}{\text{٢}}\ \ \text{جتا}\ \frac{(\text{ن}+\text{١})}{\text{٢}}}{\text{جا}\ \frac{\text{١}}{\text{٢}}}}$$

مثال (١٠٢) : أوجد ناتج كل مما يلي:

١) $\sum_{\text{هـ}=\text{١}}^{\pi} \text{جتاهـ}\Delta\text{هـ}$ ٢) $\sum_{\text{هـ}=\text{١}}^{\pi} \text{جاهـ}\Delta\text{هـ}$ ٣) $\sum_{\text{هـ}=\text{٠}}^{\pi} \text{جتاهـ}\Delta\text{هـ}$

الحل:

١) $\sum_{\text{هـ}=\text{١}}^{\pi} \text{جتاهـ}\ \Delta\text{هـ}$

$$\sum_{\text{هـ}=\text{١}}^{\text{ن}} \text{جتاهـ}\ \Delta\text{هـ} = \frac{\text{جا}(\text{ن}+\text{١}) + \text{جا}(\text{ن}) - \text{جا}(\text{١})}{\text{٢حا}(\text{١})}\ \text{،}\ \text{ن}=\pi$$

$$\sum_{\text{هـ}=\text{١}}^{\pi} \text{جتاهـ}\ \Delta\text{هـ} = \frac{\text{جا}(\pi+\text{١}) + \text{جا}(\pi) - \text{جا}(\text{١})}{\text{٢حا}(\text{١})}\ \text{، جا}\ \pi = \text{٠}$$

$$= \frac{\text{جا}(\pi+\text{١}) - \text{جا}(\text{١})}{\text{٢حا}(\text{١})}$$

$$= \frac{\text{جا}(\pi)\ \text{جتا}(\text{١}) + \text{جا}(\text{١})\ \text{جتا}(\pi) - \text{جا}(\text{١})}{\text{٢حا}(\text{١})}\ \text{، جا}(\pi)=\text{٠}\text{، جتا}(\pi)=\text{-١}$$

$$= \frac{-\ \text{جا}(\text{١}) - \text{جا}(\text{١})}{\text{٢حا}(\text{١})}$$

$$= \frac{-\ \text{٢ جا}(\text{١})}{\text{٢ حا}(\text{١})} = \text{-١}$$

$$\sum_{\text{هـ}=\text{١}}^{\pi} \text{جتاهـ}\ \Delta\text{هـ} = \text{-١}$$

٢) $\sum_{\text{هـ} = ١}^{\pi} \text{جاهـ} \Delta\text{هـ}$

$$\sum_{\text{هـ} = ١}^{\text{ن}} \text{جاهـ}\ \Delta\text{هـ} = \frac{\text{حتا(ن + ١) + جتا(ن) − جتا(١) − ١}}{\text{− ٢حا(١)}} \text{ ، ن} = \pi$$

$$= \frac{\text{حتا}(\pi + ١) + \text{جتا}(\pi) - \text{جتا}(١) - ١}{\text{− ٢حا(١)}}$$

$$= \frac{\text{حتا}(\pi + ١) + (-١) - \text{جتا}(١) - ١}{\text{− ٢حا(١)}}$$

$$= \frac{\text{حتا}(\pi + ١) - \text{جتا}(١) - ٢}{\text{− ٢حا(١)}}$$

$$= \frac{\text{حتا}(\pi)\ \text{جتا}(١) - \text{جا}(\pi)\text{جا}(١) - \text{جتا}(١) - ٢}{\text{− ٢حا(١)}} \text{ ، جا } \pi = ٠ \text{ ، جتا } \pi = -١$$

$$= \frac{-\ \text{جتا}(١) - \text{جتا}(١) - ٢}{\text{− ٢حا(١)}}$$

$$= \frac{-٢\ \text{جتا}(١) - ٢}{\text{− ٢ حا (١)}}$$

$$= \frac{-٢(\text{جتا}(١) + ١)}{\text{− ٢حا(١)}} = \frac{١ + \text{جتا}١}{\text{حا}١}$$

$$\sum_{\text{هـ} = ١}^{\text{ن}} \text{جاهـ} \Delta\text{هـ} = \frac{١ + \text{جتا}١}{\text{حا}١} \approx ١١٤,٥٩$$

٣) $\sum_{\text{هـ} = ٠}^{\pi} \text{جتاهـ} \Delta\text{هـ}$

$$\sum_{\text{هـ} = ٠}^{\pi} \text{جتاهـ}\ \Delta\text{هـ} = \text{جتا}(٠) + \sum_{\text{هـ} = ١}^{\pi} \text{جتاهـ}\ \Delta\text{هـ}$$

$$\sum_{\text{هـ} = ١}^{\pi} \text{جتاهـ}\ \Delta\text{هـ} = -١ \text{ ، جتا٠} = ١$$

$$\sum_{\text{هـ} = ٠}^{\pi} \text{جتاهـ}\ \Delta\text{هـ} = ١-١ = ٠$$

$$\sum_{\text{هـ} = ٠}^{\pi} \text{جتاهـ}\ \Delta\text{هـ} = \text{صفر}$$

٢٠١٠٢ مجموع جا(أهـ+ب) وجتا(أهـ+ب)

١) ∵ Δ جتا(أهـ+ ب) = جتا(أ(هـ+١)+ب) – جتا(أهـ+ب)

=جتا(أهـ +أ+ب) - جتا(أهـ+ب)

Δ جتا(أهـ+ ب) = -٢ جا $\frac{أ}{٢}$ جا(أهـ + $\frac{أ}{٢}$+ب) ← (١)

∵ Δ جتا(أ(هـ -١)+ب)= جتا(أهـ +ب)- جتا(أ(هـ -١)+ب)

= جتا(أهـ +ب) –جتا(أهـ -أ+ب)

Δ جتا(أ(هـ -١)+ب)=-٢ جا $\frac{أ}{٢}$ جا(أهـ - $\frac{أ}{٢}$+ ب) ← (٢)

بجمع (١) ، (٢) نحصل على

Δ جتا(أهـ+ ب)+ Δ جتا(أ(هـ -١)+ب)

= -٢ جا $\frac{أ}{٢}$ جا(أهـ + $\frac{أ}{٢}$+ب)+ -٢ جا $\frac{أ}{٢}$ جا(أهـ - $\frac{أ}{٢}$+ ب)

= -٢جا $\frac{أ}{٢}$ [جا(أهـ + $\frac{أ}{٢}$+ب) + جا(أهـ - $\frac{أ}{٢}$+ ب)]

=-٢جا $\frac{أ}{٢}$ (٢جتا $\frac{أ}{٢}$ جا(أهـ+ب)

= -٢(٢جا $\frac{أ}{٢}$ جتا $\frac{أ}{٢}$)جا(أهـ+ب)=-٢جا(أ)جا(أهـ+ب)

∴ Δ جتا(أهـ+ ب)+ Δ جتا(أ(هـ -١)+ب)= -٢جا(أ)جا(أهـ+ب)← (٣)

بأخذ $\sum_{هـ=١}^{ن}$ للطرفين العلاقة (٣)

$\sum_{هـ=١}^{ن}$ (Δ جتا(أهـ+ ب)+ Δ جتا(أ(هـ -١)+ب)) Δ هـ= $\sum_{هـ=١}^{ن}$ (-٢جا(أ)جا(أهـ+ب)) Δ هـ

Δ جتا(أهـ+ ب) + Δ جتا(أ(هـ -١)+ب) = -٢جا(أ) $\sum_{هـ=١}^{ن}$ جا(أهـ+ب) Δ هـ

حتا[أ(ن+١)+ب] – جتا(أ+ب) + جتا (أن+ب)- جتا(ب) =-٢جا(أ) $\sum_{هـ=١}^{ن}$ جا(أهـ+ب) Δ هـ

-٢جا(أ) $\sum_{هـ=١}^{ن}$ جا(أهـ+ب) Δ هـ = حتا[أ(ن+١)+ب] + جتا (أن+ب) – جتا(أ+ب)-
جتا(ب)

$$\sum_{هـ=١}^{ن} جا(أهـ + ب)\Delta هـ = \frac{جتا[أ(ن+١)+ب] + جتا(أن+ب) - جتا(أ+ب) - جتا(ب)}{-٢حا(أ)}$$

أو

-٢جا(أ) $\sum_{\text{هـ}=١}^{\text{ن}}$ جا(أهـ+ب) Δهـ = حتا[أ(ن+١)+ب] + جتا (أن+ب) – جتا(أ+ب) - جتا(ب)

=[حتا[أ(ن+١)+ب]- جتا(ب)]+[جتا (أن+ب)- جتا(أ+ب)]

=[-٢جا $\frac{\text{أ(ن+١)+٢ب}}{٢}$ جا $\frac{\text{(أ(ن+١))}}{٢}$]+[-٢جا $\frac{\text{أ(ن+١)+٢ب}}{٢}$ جا $\frac{\text{(أ(ن-١))}}{٢}$]

=-٢جا $\frac{\text{أ(ن+١)+٢ب}}{٢}$ [جا $\frac{\text{(أ(ن+١))}}{٢}$ + $\frac{\text{(أ(ن-١))}}{٢}$]

=-٢جا $\frac{\text{أ(ن+١)+٢ب}}{٢}$ [٢جا $\frac{\text{أن}}{٢}$ جتا $\frac{\text{أ}}{٢}$]

-٤جا $\frac{\text{أ}}{٢}$ جتا $\frac{\text{أ}}{٢}$ $\sum_{\text{هـ}=١}^{\text{ن}}$ جا(أهـ+ب) Δهـ =-٤جتا $\frac{\text{أ}}{٢}$ جا $\frac{\text{أن}}{٢}$ جا $\frac{\text{أ(ن+١)+٢ب}}{٢}$

جا $\frac{\text{أ}}{٢}$ $\sum_{\text{هـ}=١}^{\text{ن}}$ جا(أهـ+ب) Δهـ = جا $\frac{\text{أن}}{٢}$ جا $\frac{\text{أ(ن+١)+٢ب}}{٢}$

$$\boxed{\sum_{\text{هـ}=١}^{\text{ن}} \text{جا(أهـ+ب)}\ \Delta\text{هـ} = \frac{\text{جا}\ \frac{\text{أن}}{٢}\ \text{جا}\ \frac{\text{(أ(ن+١)+٢ب)}}{٢}}{\text{جا}\ \frac{\text{أ}}{٢}}}$$

٢) ∵ Δجا(أهـ+ب) = جا[أ(هـ+١)+ب] – جا(أهـ+ب)

Δجا(أهـ+ب) = ٢جا $\frac{\text{أ}}{٢}$ جتا(أهـ + $\frac{\text{أ}}{٢}$ +ب) ⟵ (٤)

∵ Δجا[أ(هـ-١)+ب] = جا أهـ+ب) - جا[أ(هـ-١)+ب]

Δجا[أ(هـ-١)+ب]= ٢جا $\frac{\text{أ}}{٢}$ جتا(أهـ - $\frac{\text{أ}}{٢}$ +ب) ⟵ (٥)

بجمع العلاقة (٤) ، (٥) نجد

Δجا(أهـ+ب) + Δجا[أ(هـ-١)+ب] = ٢جا $\frac{\text{أ}}{٢}$ جتا(أهـ + $\frac{\text{أ}}{٢}$ +ب) + ٢جا $\frac{\text{أ}}{٢}$ جتا(أهـ - $\frac{\text{أ}}{٢}$ +ب)

=٢جا $\frac{\text{أ}}{٢}$ [جتا(أهـ + $\frac{\text{أ}}{٢}$ +ب) + جتا(أهـ - $\frac{\text{أ}}{٢}$ +ب)]

= ٢جا $\frac{\text{أ}}{٢}$ [٢ جتا $\frac{\text{أ}}{٢}$ جتا(أهـ+ب)]

= ٢ (٢جا $\frac{\text{أ}}{٢}$ جتا $\frac{\text{أ}}{٢}$) جتا(أهـ+ب)

Δجا(أهـ+ب) + Δجا[أ(هـ-١)+ب]= ٢ جا(أ)جتا(أهـ+ب) ⟵(٦)

بأخذ $\sum_{\text{هـ}=١}^{\text{ن}}$ للطرفين العلاقة (٦) نحصل على

$\sum_{\text{هـ}=١}^{\text{ن}}$ (Δجا(أهـ+ب) + Δجا[أ(هـ-١)+ب]) Δهـ = $\sum_{\text{هـ}=١}^{\text{ن}}$ (٢ جا(أ)جتا(أهـ+ب) Δهـ

$$\sum_{\text{هـ}=١}^{\text{ن}} \Delta\text{جا}(\text{أهـ}+\text{ب}) + \sum_{\text{هـ}=١}^{\text{ن}} \Delta\text{جا}[\text{أ}(\text{هـ}-١)+\text{ب}]\,\Delta\text{هـ} = ٢\text{جا}(\text{أ}) \sum_{\text{هـ}=١}^{\text{ن}} \text{جتا}(\text{أهـ}+\text{ب})\,\Delta\text{هـ}$$

$$٢\text{جا}(\text{أ}) \sum_{\text{هـ}=١}^{\text{ن}} \text{جتا}(\text{أهـ}+\text{ب})\,\Delta\text{هـ} = \sum_{\text{هـ}=١}^{\text{ن}} \Delta\text{جا}(\text{أهـ}+\text{ب})\,\Delta\text{هـ} + \sum_{\text{هـ}=١}^{\text{ن}} \Delta\text{جا}[\text{أ}(\text{هـ}-١)+\text{ب}]\,\Delta\text{هـ}$$

$$٢\text{جا}(\text{أ}) \sum_{\text{هـ}=١}^{\text{ن}} \text{جتا}(\text{أهـ}+\text{ب})\,\Delta\text{هـ} = \text{جا}[\text{أ}(\text{ن}+١)+\text{ب}] - \text{جا}(\text{أ}+\text{ب}) + \text{جا}(\text{أن}+\text{ب}) - \text{حا}(\text{ب})$$

$$٢\text{جا}(\text{أ}) \sum_{\text{هـ}=١}^{\text{ن}} \text{جتا}(\text{أهـ}+\text{ب})\,\Delta\text{هـ} = \text{جا}[\text{أ}(\text{ن}+١)+\text{ب}] + \text{جا}(\text{أن}+\text{ب}) - \text{جا}(\text{أ}+\text{ب}) - \text{حا}(\text{ب})$$

$$\boxed{\sum_{\text{هـ}=١}^{\text{ن}} \text{جتا}(\text{أهـ}+\text{ب})\Delta\text{هـ} = \frac{\text{جا}[\text{أ}(\text{ن}+١)+\text{ب}] + \text{جا}(\text{أن}+\text{ب}) - \text{جا}(\text{أ}+\text{ب}) - \text{جا}(\text{ب})}{٢\text{حا}(\text{أ})}}$$

أو

$$٢\text{جا}(\text{أ}) \sum_{\text{هـ}=١}^{\text{ن}} \text{جتا}(\text{أهـ}+\text{ب})\,\Delta\text{هـ} = \text{جا}[\text{أ}(\text{ن}+١)+\text{ب}] + \text{جا}(\text{أن}+\text{ب}) - \text{جا}(\text{أ}+\text{ب}) - \text{حا}(\text{ب})$$

$$= [\text{جا}[\text{أ}(\text{ن}+١)+\text{ب}] - \text{حا}(\text{ب})] + [\text{جا}(\text{أن}+\text{ب}) - \text{جا}(\text{أ}+\text{ب})]$$

$$= [٢\text{جتا}\,\frac{\text{أ}(\text{ن}+١)+٢\text{ب}}{٢}\,\text{جا}\,\frac{\text{أ}(\text{ن}+١))}{٢}] + [\text{جتا}\,\frac{\text{أ}(\text{ن}+١)+٢\text{ب}}{٢}\,\text{جا}\,\frac{\text{أ}(\text{ن}-١))}{٢}]$$

$$= ٢\text{جتا}\,\frac{\text{أ}(\text{ن}+١)+٢\text{ب}}{٢}\,[\text{جا}\,\frac{\text{أ}(\text{ن}+١))}{٢} + \text{جا}\,\frac{\text{أ}(\text{ن}-١))}{٢}]$$

$$= ٢\text{جتا}\,\frac{\text{أ}(\text{ن}+١)+٢\text{ب}}{٢}\,[٢\text{جا}\,\frac{\text{أن}}{٢}\,\text{جتا}\,\frac{\text{أ}}{٢}]$$

$$٤\text{جا}\,\frac{\text{أ}}{٢}\,\text{جتا}\,\frac{\text{أ}}{٢} \sum_{\text{هـ}=١}^{\text{ن}} \text{جتا}(\text{أهـ}+\text{ب})\,\Delta\text{هـ} = ٤\text{جتا}\,\frac{\text{أ}}{٢}\,\text{جا}\,\frac{\text{أن}}{٢}\,\text{جتا}\,\frac{\text{أ}(\text{ن}+١)+٢\text{ب}}{٢}$$

$$\text{جا}\,\frac{\text{أ}}{٢} \sum_{\text{هـ}=١}^{\text{ن}} \text{جتا}(\text{أهـ}+\text{ب})\,\Delta\text{هـ} = \text{جا}\,\frac{\text{أن}}{٢}\,\text{جتا}\,\frac{\text{أ}(\text{ن}+١)+٢\text{ب}}{٢}$$

$$\boxed{\sum_{\text{هـ}=١}^{\text{ن}} \text{جتا}(\text{أهـ}+\text{ب})\,\Delta\text{هـ} = \frac{\text{جا}\,\frac{\text{أن}}{٢}\,\text{جتا}\,\frac{\text{أ}(\text{ن}+١)+٢\text{ب})}{٢}}{\text{جا}\,\frac{\text{أ}}{٢}}}$$

٣٠١٠٢ العلاقة بين مجموع جاهـ و مجموع جتاهـ

مما سبق نجد أن

$$\sum_{\text{هـ}=1}^{\text{ن}} \text{جا}\,(\text{أهـ}+\text{ب})\,\Delta\text{هـ} = \frac{\text{جا}\,\frac{\text{أن}}{2}\ \text{جا}\,\frac{\text{أ}(\text{ن}+1)+2\text{ب}}{2}}{\text{جا}\,\frac{\text{أ}}{2}} \longleftarrow (1)$$

$$\sum_{\text{هـ}=1}^{\text{ن}} \text{جتا}\,(\text{أهـ}+\text{ب})\,\Delta\text{هـ} = \frac{\text{جا}\,\frac{\text{أن}}{2}\ \text{جتا}\,\frac{\text{أ}(\text{ن}+1)+2\text{ب}}{2}}{\text{جا}\,\frac{\text{أ}}{2}} \longleftarrow (2)$$

بقسمة (١) على (٢) نحصل على التالي:

$$\frac{\sum_{\text{هـ}=1}^{\text{ن}} \text{جا}(\text{أهـ}+\text{ب})\Delta\text{هـ}}{\sum_{\text{هـ}=1}^{\text{ن}} \text{جتا}(\text{أهـ}+\text{ب})\Delta\text{هـ}} = \text{ظا}\ \frac{\text{أ}(\text{ن}+1)+2\text{ب}}{2}$$

$$\sum_{\text{هـ}=1}^{\text{ن}} \text{جا}\,(\text{أهـ}+\text{ب})\,\Delta\text{هـ} = \text{ظا}\,\frac{\text{أ}(\text{ن}+1)+2\text{ب}}{2}\ \sum_{\text{هـ}=1}^{\text{ن}} \text{جتا}\,(\text{أهـ}+\text{ب})\,\Delta\text{هـ} \longleftarrow (3)$$

$$\sum_{\text{هـ}=1}^{\text{ن}} \text{جتا}\,(\text{أهـ}+\text{ب})\,\Delta\text{هـ} = \text{ظتا}\,\frac{\text{أ}(\text{ن}+1)+2\text{ب}}{2}\ \sum_{\text{هـ}=1}^{\text{ن}} \text{جا}\,(\text{أهـ}+\text{ب})\,\Delta\text{هـ} \longleftarrow (4)$$

ضع أ=١ ، ب=٠

$$\sum_{\text{هـ}=1}^{\text{ن}} \text{جاهـ}\,\Delta\text{هـ} = \text{ظا}\,\frac{(\text{ن}+1)}{2}\ \sum_{\text{هـ}=1}^{\text{ن}} \text{جتاهـ}\,\Delta\text{هـ} \longleftarrow (5)$$

$$\sum_{\text{هـ}=1}^{\text{ن}} \text{جتاهـ}\,\Delta\text{هـ} = \text{ظتا}\,\frac{(\text{ن}+1)}{2}\ \sum_{\text{هـ}=1}^{\text{ن}} \text{جاهـ}\,\Delta\text{هـ} \longleftarrow (6)$$

ضع أ=٢ ، ب=٠

$$\sum_{\text{هـ}=1}^{\text{ن}} \text{جا}2\text{هـ}\,\Delta\text{هـ} = \text{ظا}(\text{ن}+1)\ \sum_{\text{هـ}=1}^{\text{ن}} \text{جتا}2\text{هـ}\,\Delta\text{هـ} \longleftarrow (7)$$

$$\sum_{\text{هـ}=1}^{\text{ن}} \text{جتا}2\text{هـ}\,\Delta\text{هـ} = \text{ظتا}(\text{ن}+1)\ \sum_{\text{هـ}=1}^{\text{ن}} \text{جا}2\text{هـ}\,\Delta\text{هـ} \longleftarrow (8)$$

مثال (٢٠٢) : أوجد ناتج ما يلي

١) $\sum_{\text{هـ}=\text{١}}^{\text{ن}} \text{جا٢هـ}\ \Delta\text{هـ}$ ٢) $\sum_{\text{هـ}=\text{١}}^{\text{ن}} \text{جتا٢هـ}\Delta\text{هـ}$

الحل:

١) $\sum_{\text{هـ}=\text{١}}^{\text{ن}} \text{جا٢هـ}\Delta\text{هـ}$

$$\boxed{\sum_{\text{هـ}=\text{١}}^{\text{ن}} \text{جا}(\text{أهـ}+\text{ب})\Delta\text{هـ} = \frac{\text{جتا}[\text{أ}(\text{ن}+\text{١})+\text{ب}] + \text{جتا}(\text{أن}+\text{ب}) - \text{جتا}(\text{أ}+\text{ب}) - \text{جتا}(\text{ب})}{-\text{٢حا}(\text{أ})}}$$

ضع أ=٢ ، ب=٠ نحصل على

$$\sum_{\text{هـ}=\text{١}}^{\text{ن}} \text{جا٢هـ}\Delta\text{هـ} = \frac{\text{جتا}[\text{٢}(\text{ن}+\text{١})] + \text{جتا}(\text{٢ن}) - \text{جتا}(\text{٢}) - \text{١}}{-\text{٢حا}(\text{٢})}$$

$$-\text{٢حا٢} \sum_{\text{هـ}=\text{١}}^{\text{ن}} \text{جا٢هـ}\ \Delta\text{هـ} = \text{جتا}\ (\text{٢ن}+\text{٢}) + \text{جتا٢ن} - (\text{جتا٢} + \text{جتا٠})$$

$$-\text{٤ جا١ جتا١} \sum_{\text{هـ}=\text{١}}^{\text{ن}} \text{جا٢هـ}\Delta\text{هـ} = \text{٢جتا ١ جتا}(\text{٢ن}+\text{١}) - \text{٢ حتا١ حتا ١}$$

$$-\text{٢ جا١} \sum_{\text{هـ}=\text{١}}^{\text{ن}} \text{جا٢هـ}\Delta\text{هـ} = \text{جتا}(\text{٢ن}+\text{١}) - \text{جتا١}$$

$$-\text{٢ جا١} \sum_{\text{هـ}=\text{١}}^{\text{ن}} \text{جا٢هـ}\Delta\text{هـ} = -\text{٢جا}(\text{ن}+\text{١})\ \text{جا}(\text{ن})$$

$$\text{جا١} \sum_{\text{هـ}=\text{١}}^{\text{ن}} \text{جا٢هـ}\Delta\text{هـ} = \text{جا}(\text{ن}+\text{١})\ \text{جا}(\text{ن})$$

$$\sum_{\text{هـ}=\text{١}}^{\text{ن}} \text{جا٢هـ}\Delta\text{هـ} = \frac{\text{جا ن جا}(\text{ن}+\text{١})}{\text{جا ١}}$$

٢) $\sum_{\text{هـ}=\text{١}}^{\text{ن}} \text{جتا٢هـ}\Delta\text{هـ}$

$$\boxed{\sum_{\text{هـ}=\text{١}}^{\text{ن}} \text{جتا}(\text{أهـ}+\text{ب})\Delta\text{هـ} = \frac{\text{جا}[\text{أ}(\text{ن}+\text{١})+\text{ب}] + \text{جا}(\text{أن}+\text{ب}) - \text{جا}(\text{أ}+\text{ب}) - \text{جا}(\text{ب})}{\text{٢حا}(\text{أ})}}$$

ضع أ=٢ ، ب=٠

$$\boxed{\sum_{\text{هـ}=\text{١}}^{\text{ن}} \text{جتا٢هـ}\Delta\text{هـ} = \frac{\text{جا}[\text{٢}(\text{ن}+\text{١})] + \text{جا}(\text{٢ن}) - \text{جا}(\text{٢})}{\text{٢حا}(\text{٢})}}$$

٤٠١٠٢ مجموع $\text{جا}^{٢}\text{هـ}$ ، $\text{جتا}^{٢}\text{هـ}$

كما هو معلوم من قوانين الدوال المثلثة

$$\text{جا}^{٢}\text{هـ} = \frac{١}{٢}\left(١ - \text{جتا}٢\text{هـ}\right)$$

بأخذ $\sum_{\text{هـ}=١}^{\text{ن}}$ للطرفين

$$\sum_{\text{هـ}=١}^{\text{ن}} \text{جا}^{٢}\text{هـ}\ \Delta\text{هـ} = \frac{١}{٢} \sum_{\text{هـ}=١}^{\text{ن}} \left(١ - \text{جتا}٢\text{هـ}\right) \Delta\text{هـ}$$

$$= \frac{١}{٢}\left[\sum_{\text{هـ}=١}^{\text{ن}} \Delta\text{هـ} - \sum_{\text{هـ}=١}^{\text{ن}} \text{جتا}٢\text{هـ}\ \Delta\text{هـ}\right]$$

$$\boxed{\sum_{\text{هـ}=١}^{\text{ن}} \text{جا}^{٢}\text{هـ}\ \Delta\text{هـ} = \left[\frac{\text{ن}(\text{ن}+١)}{٤} - \frac{\text{جا}[٢(\text{ن}+١)] + \text{جا}(٢\text{ن}) - \text{جا}(٢)}{٤\text{حا}(٢)}\right]}$$

$$\because\ \text{جا}^{٢}\text{هـ} + \text{جتا}^{٢}\text{هـ} = ١$$

$$\text{جتا}^{٢}\text{هـ} = ١ - \text{جا}^{٢}\text{هـ}$$

بأخذ $\sum_{\text{هـ}=١}^{\text{ن}}$ للطرفين

$$\sum_{\text{هـ}=١}^{\text{ن}} \text{جتا}^{٢}\text{هـ}\ \Delta\text{هـ} = \sum_{\text{هـ}=١}^{\text{ن}} \left(١ - \text{جا}^{٢}\text{هـ}\right)$$

$$= \sum_{\text{هـ}=١}^{\text{ن}} ١ - \sum_{\text{هـ}=١}^{\text{ن}} \text{جا}^{٢}\text{هـ}$$

$$= \frac{\text{ن}(\text{ن}+١)}{٢} - \frac{\text{ن}(\text{ن}+١)}{٤} + \frac{\text{جا}[٢(\text{ن}+١)] + \text{جا}(٢\text{ن}) - \text{جا}(٢)}{٤\text{حا}(٢)}$$

$$\boxed{\sum_{\text{هـ}=١}^{\text{ن}} \text{جتا}^{٢}\text{هـ}\ \Delta\text{هـ} = \frac{\text{ن}(\text{ن}+١)}{٤} + \frac{\text{جا}[٢(\text{ن}+١)] + \text{جا}(٢\text{ن}) - \text{جا}(٢)}{٤\text{حا}(٢)}}$$

٢٠٢ مجموع الدالة الآسية

مجموعة الدالة الآسية $\text{أ}^{\text{هـ}}$ تعطى بالقانون التالي:

$$\sum_{\text{هـ}=١}^{\text{ن}} \text{أ}^{\text{هـ}}\,\Delta\text{هـ} = \frac{\text{أ}}{\text{أ}-١}\left(\text{أ}^{\text{ن}}-١\right) \text{ ، أ عدد حقيقي ثابت}$$

الإثبات:

$$\because\ \Delta\left(\text{أ}^{\text{هـ}}\right) = \text{أ}^{\text{هـ}+١} - \text{أ}^{\text{هـ}}$$

$$\Delta\,\text{أ}^{\text{هـ}} = (\text{أ}-١)\,\text{أ}^{\text{هـ}}$$

بأخذ $\sum_{\text{هـ}=١}^{\text{ن}}$ للطرفين

$$\sum_{\text{هـ}=١}^{\text{ن}} \Delta\,\text{أ}^{\text{هـ}}\,\Delta\text{هـ} = \sum_{\text{هـ}=١}^{\text{ن}} (\text{أ}-١)\,\text{أ}^{\text{هـ}}\,\Delta\text{هـ}$$

$$\text{أ}^{\text{ن}+١} - \text{أ} = (\text{أ}-١) \sum_{\text{هـ}=١}^{\text{ن}} \text{أ}^{\text{هـ}}\,\Delta\text{هـ}$$

$$(\text{أ}-١) \sum_{\text{هـ}=١}^{\text{ن}} \text{أ}^{\text{هـ}}\,\Delta\text{هـ} = \text{أ}\left(\text{أ}^{\text{ن}}-١\right)$$

$$\sum_{\text{هـ}=١}^{\text{ن}} \text{أ}^{\text{هـ}}\,\Delta\text{هـ} = \frac{\text{أ}}{\text{أ}-١}\left(\text{أ}^{\text{ن}}-١\right) \text{ ، أ عدد حقيقي لا يساوي الواحدالصحيح.}$$

مثال (٢٠٢) : أوجد ناتج $\sum_{\text{هـ}=١}^{١٠} ٢^{\text{هـ}}\,\Delta\text{هـ}$؟

الحل:

$$\because\ \sum_{\text{هـ}=١}^{\text{ن}} \text{أ}^{\text{هـ}}\,\Delta\text{هـ} = \frac{\text{أ}}{\text{أ}-١}\left(\text{أ}^{\text{ن}}-١\right) \text{ ،ن=١٠ ، أ = ٢}$$

$$\therefore\ \sum_{\text{هـ}=١}^{١٠} ٢^{\text{هـ}}\,\Delta\text{هـ} = \frac{٢}{٢-١}\left(٢^{١٠}-١\right) = ٢(١٠٢٣) = ٢٠٤٦$$

$$\sum_{\text{هـ}=١}^{١٠} ٢^{\text{هـ}}\,\Delta\text{هـ} = ٢٠٤٦$$

٣٠٢ مجموع الدالة اللوغارتمية لو (هـ)

مجموع الدالـة (لوهـ) تعطى بالقانون التالي:

$\sum_{ه=١}^{ن}$ لو (هـ) Δهـ = لو $\underline{|ن}$ ، $\underline{|ن}$ = ن(ن-١) (ن-٢) ٠٠٠ ٤×٣ × ١

الإثبات:

$\underline{|ن}$ = ١× ٢× ٣ × ٤ ٠٠٠٠ (ن-٣)× (ن-٢)× (ن-١)× ن

بأخذ لو للطرفين

لو $\underline{|ن}$ = لو ١ + لو ٢ + لو ٣ + ٠٠٠٠ + لو (ن-٢) + لو (ن-١) + لو (ن)

لو $\underline{|ن}$ = $\sum_{ه=١}^{ن}$ لوهـ Δهـ

$\sum_{ه=١}^{ن}$ لو (هـ) Δهـ = لو $\underline{|ن}$

مثال على ذالك $\sum_{ه=١}^{١٠}$ لو (هـ) Δهـ = لو $\underline{|١٠}$ = لو ٣٦٢٨٨٠٠ ≈ ١٥,١٠

٤٠٢ مجموع ن $\underline{|ن}$

Δ $\underline{|ن}$ = $\underline{|ن+١}$ - $\underline{|ن}$

= (ن+١) $\underline{|ن}$ - $\underline{|ن}$ = $\underline{|ن}$ (ن+١ - ١) = ن $\underline{|ن}$

Δ $\underline{|ن}$ = ن $\underline{|ن}$

بأخذ $\sum_{ه=١}^{ن}$ للطرفين

$\sum_{ه=١}^{ن}$ Δ $\underline{|ن}$ Δهـ = $\sum_{ه=١}^{ن}$ ن $\underline{|ن}$ Δهـ

$\underline{|ن+١}$ – ١ = $\sum_{ه=١}^{ن}$ ن $\underline{|ن}$ Δهـ

$\sum_{ه=١}^{ن}$ ن $\underline{|ن}$ Δهـ = $\underline{|ن+١}$ – ١

تم بحمد الله